



Vista Algebraica

Vista Gráfica

GeoGebra

Una herramienta para el desarrollo profesional docente en Matemáticas

Jesús Eduardo Hinojos Ramos



**GeoGebra: una herramienta para el
desarrollo profesional docente en
Matemáticas**

GeoGebra: una herramienta para el desarrollo profesional docente en Matemáticas

Autor:

Dr. Jesús Eduardo Hinojos Ramos





Instituto Tecnológico de Sonora
5 de febrero, No. 818 sur, colonia Centro
Ciudad Obregón, Sonora, México; 85000

www.itson.mx

Email: rectoria@itson.mx

Teléfono: (644) 410-90-00

Primera edición

Septiembre, 2025

ISBN para ebook: 978-607-609-268-2

Gestión editorial

Mtra. Marisol Cota Reyes

Oficina de publicaciones ITSON

marisol.cota@itson.edu.mx

Maquetación y diseño

Mtra. Marisol Cota Reyes

Esta obra ha sido sometida a dictamen doble ciego por parte de pares académicos especialistas en la temática abordada.

Reservados todos los derechos conforme a la ley.

Hecho en México



Aviso de derechos de autor:

Todos estos derechos están reservados.

«GeoGebra(R)» y otras marcas registradas son marcas registradas de GeoGebra GmbH.

Se autoriza su uso bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual (versión 3.0 o posterior), cuyo texto actual se puede encontrar en este enlace: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/legalcode>

Para más información, visita <https://www.geogebra.org/>

Directorio

Dr. Jesús Héctor Hernández López
Rector

Dr. Jaime Garatuza Payán
Vicerrectoría Académica

Dr. Rodolfo Valenzuela Reynaga
Vicerrectoría Administrativa

Dr. Ernesto Uriel Cantú Soto
Secretaría de la Rectoría

Mtro. Mauricio López Acosta
Dirección Unidad Navjoa

Dr. Humberto Aceves Gutiérrez
Dirección Unidad Guaymas

Dra. Sonia Verónica Mortis Lozoya
Dirección Académica de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dra. María Dolores Moreno Millanes
Dirección Académica de la División de Ciencias Económico Administrativas

Dr. Pablo Gortares Moroyoqui
Dirección Académica de la División de Recursos Naturales

Dr. Armando Ambrosio López
Dirección Académica de la División de Ingeniería y Tecnología

Consejo Dictaminador

Diana del Carmen Torres Corrales

Doctora en Ciencias en la especialidad de la Matemática Educativa
por Cinvestav-IPN, México

Profesora Auxiliar del Departamento de Matemáticas
del Instituto Tecnológico de Sonora

✉ diana.torres14915@potros.itson.edu.mx

Saúl Ernesto Cosmes Aragón

Doctor en Didáctica de la Matemática
por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Profesor Auxiliar del Departamento de Matemáticas
del Instituto Tecnológico de Sonora

✉ saúl.cosmes28211@potros.itson.edu.mx

Agradecimientos

Agradezco al Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora, a los miembros del grupo latinoamericano de Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa (FIME) y a los profesores que tomaron el curso donde implementamos lo presentado en este libro como una estrategia para el desarrollo profesional docente.

Agradezco también el trabajo del equipo de investigación sobre formación de profesores que forman ingenieros que hemos conformado la Dra. Diana Torres, la Dra. Lilia Aké y el Dr. Saúl Cosmes, ya que con el trabajo continuo en investigación y reflexión avanzamos con pasos pequeños hacia metas grandes.

Agradezco también al Cdto. a Dr. Sergio Rubio, por su trabajo continuo en aras de la alfabetización tecnológica de los docentes latinoamericanos.

Contenido

Presentación de la obra	11
Prólogo	22
Introducción	24

UNIDAD 1

¿Qué es GeoGebra y qué puede hacerse con él?	30
Práctica 0 – Introducción a GeoGebra	31
Práctica 0a – Cómo instalar GeoGebra	31
Práctica 0b – Cómo registrar una cuenta en GeoGebra	35
Práctica 0c – Dónde consultar material didáctico de otros usuarios de GeoGebra	39
Práctica 1 - Construcciones Rígidas y construcciones no rígidas en GeoGebra	42
Práctica 1a	42
Práctica 1b	43

UNIDAD 2

Las Vistas Gráficas de GeoGebra	47
Práctica 2 - Formatos, texto en construcciones y condicionales	47
Práctica 2a	48
Práctica 2b	53

Práctica 3 – Comandos de GeoGebra en Vista Gráfica y construcciones con base en Secuencias 60

Práctica 3a 60

Práctica 3b 65

Práctica 4 – La Vista Gráfica 3D 74

Práctica 4a 74

Práctica 4b 78

Práctica 4c 79

Práctica 4d 80

UNIDAD 3

La Vista de Cálculo Simbólico 84

Práctica 5 – La herramienta CAS (Cálculo Simbólico)..... 85

Práctica 5a 85

Práctica 5b 90

Práctica 5c 90

Práctica 5d 92

UNIDAD 4

La Vista de Hoja de Cálculo, su vinculación con las Vistas Gráficas y la Calculadora de Probabilidad 95

Práctica 6 – Vinculando la Vista Gráfica y la Hoja de Cálculo, análisis estadístico de datos en Hoja de Cálculo 96

Práctica 6a 97

Práctica 6b 105

Práctica 6c 117

Práctica 7 – Cálculos de Probabilidad con GeoGebra 123

Práctica 7a 123

Práctica 7b 129

UNIDAD 5

El Protocolo de Construcción 133

Práctica 8 – La Vista de Protocolo de Construcción 133

Práctica 8a 134

Práctica 8b 137

Práctica 8c 138

Conclusiones 141

Referencias 143

Anexo A. Reporte de práctica de GeoGebra 147

Semblanza del autor 150

Presentación de la obra

Entre Matemáticas y Tecnología: el lugar de GeoGebra en la Educación Global

Se sabe de antiguo que las nuevas ideas [y tecnologías] pasan por tres etapas de desarrollo: primero son ignoradas, después son rechazadas explícitamente, y finalmente son aceptadas. Pero el comentario de la gente es: "¿Y qué?, ¿de qué se trata todo este alboroto? No se trata de nada nuevo".

(Pinch, 2015, p. 23)

Esta reflexión de Pinch bien podría describir el viaje de GeoGebra en muchas de nuestras escuelas y universidades. Lo que alguna vez fue una novedad ignorada o rechazada, hoy es una herramienta fundamental en la educación matemática global. Pero, ¿qué hace a GeoGebra tan especial en la larga historia de la simbiosis entre matemáticas y tecnología?

GeoGebra es conocido por ser un software de matemáticas dinámicas, una comunidad educativa de alcance global y un conjunto de herramientas al servicio de todas y todos los docentes (no solo de matemáticas). En esta presentación me centro en el software, con el propósito de mostrarlo como parte natural de esa simbiosis histórica entre matemáticas y tecnologías, e ilustrar el impacto que ha tenido en la educación global.

Este doble marco —histórico e internacional— me permite presentar el libro GeoGebra: una herramienta para el desarrollo profesional docente en Matemáticas como una guía necesaria y actualizada sobre GeoGebra. Para ello, he estructurado la exposición en tres partes:

El contexto histórico de la relación entre matemáticas y tecnologías, para mostrar a GeoGebra como un destino natural de esta relación. Esto me permitirá realzar el valor de este libro como una obra conceptual, pedagógica y técnica, rigurosamente actualizado, indispensable en un mundo de acelerado cambio tecnológico.

La mirada internacional, que muestra cómo GeoGebra ha alcanzado un reconocimiento global, avalado por organismos internacionales como la UNESCO. Destacando que parte de este reconocimiento es gracias a la comunidad de usuarias y usuarios latinoamericanos, una de las más grandes y activas. De ahí la relevancia de contar con un manual elaborado desde América Latina y en español.

Finalmente, una recomendación práctica que orienta la lectura según el conocimiento y la experiencia del lector con GeoGebra en tres niveles: introductorio, intermedio y avanzado. Este orden de lectura por niveles complementa la organización temática dada por el autor del libro.

1. GeoGebra como destino natural en la relación entre matemáticas y tecnología

Si se reflexiona sobre la naturaleza de las tecnologías y las matemáticas, es fácil caer en la aparente dicotomía entre lo concreto (tecnología) y lo abstracto (matemáticas). Al pensar en un martillo se nos viene a la mente su forma, tamaño y los materiales con los que está hecho; es decir, su materialidad. Caso contrario cuando pensamos en un número, por ejemplo, el dos, se nos viene a la mente el símbolo “2” en un papel o pantalla digital, pero ese no es el número sino una de sus múltiples representaciones. El número es una idea abstracta imposible de materializar.

Sin embargo, esta distinción es engañosa ya que en realidad existe una relación simbiótica entre ellas: ambas partes aprovechan las características de la otra para el desarrollo y beneficio mutuo. A veces, la tecnología nace para el desarrollo y la realización concreta de las matemáticas y, en otras ocasiones, la tecnología realiza su aporte a la matemática viniendo desde otras áreas, como el comercio o la ciencia (Roberts et al, 2013).

La historia ofrece múltiples ejemplos de artefactos tecnológicos que reflejan la necesidad humana de registrar ideas matemáticas abstractas en artefactos materiales. Uno de los más antiguos es el hueso de Ishango, datado entre 20.000 y 90.000 años, cuyas marcas evidencian razonamiento lógico (no aleatorias) y la necesidad humana de contar, registrar fechas o un sistema numérico. Así, lo abstracto se representaba de manera tangible a través de un soporte material (Freiman, 2020; Pletser y Huylebrouck, 1999).

Así como el hueso de Ishango, a lo largo de la historia diversas tecnologías han servido para llevar a cabo objetivos matemáticos, que según el tipo de representación generada son agrupadas en cinco etapas de desarrollo (Moreno-Armella et al., 2008):

1. **Estática inerte:** inscripciones permanentes, como marcas en huesos, cuñas en tablillas de arcilla o tinta sobre papel.
2. **Estática cinestésica:** registros que pueden borrarse, como la tiza, el lápiz o las construcciones geométricas sobre arena.
3. **Estática computacional:** registros computacionales que no permiten interacción directa, como las calculadoras o los primeros computadores al hacer operaciones aritméticas o generar gráficas a través de comandos.
4. **Dinámica discreta:** representaciones maleables, aunque sin posibilidad de interactuar directamente con ellas. Como la gráfica de una hoja de cálculo que cambia al modificar los datos de origen.
5. **Dinámico continua:** interacción directa con la representación matemática, como arrastrar un punto en una construcción geométrica en GeoGebra y observar los cambios que provoca esta acción en el diagrama completo¹.

Estas etapas dan cuenta de la evolución de las tecnologías creadas y usadas para fines matemáticos. Es evidente que cada vez se necesitan tecnologías más precisas y potentes, de las cuales se tiene a GeoGebra como ejemplo de las tecnologías matemáticas más innovadoras y versátiles².

Si bien GeoGebra pertenece a la etapa más reciente (dinámico continua), también destaca por sobre otras tecnologías debido a su intencionalidad. A diferencia de sus predecesores (ábaco, regla, compás), cuyo objetivo es hacer matemáticas, GeoGebra fue concebido para enseñar y aprender matemáticas, como lo confirma la tesis de su creador, Markus Hohenwarter (2002).

El objetivo de esta tesis es desarrollar un programa informático denominado GeoGebra que pueda ser utilizado para la enseñanza de la geometría y que combine software de geometría dinámica y álgebra computacional para el tratamiento de objetos geométricos en el plano³ (Hohenwarter, 2002, p. 3).

¹ Ver un ejemplo en la Práctica 1a y 1b (pp. 41 - 43) sobre construcción de triángulos libres o siguiendo un proceso geométrico de construcción.

² Ver la Práctica 3a (pp. 64 - 68) como ejemplo del alto grado de precisión en la ubicación de puntos en el plano usando GeoGebra.

³ Traducción libre del alemán austriaco: Ziel dieser Arbeit ist ein für den Geometrieunterricht verwendbares Computerprogramm namens GeoGebra, das eine Verbindung dynamischer Geometriesoftware und Computeralgebra zur Behandlung geometrischer Objekte der Ebene herstellt.

Un aspecto a destacar en este punto es que, desde sus orígenes centrados en la geometría, GeoGebra se ha expandido a un software de matemáticas dinámicas gracias a la colaboración activa de su comunidad educativa. Esta se involucró en el desarrollo técnico del software, motivado por las necesidades educativas de sus miembros y la misma comunidad (Rubio-Pizzorno y Montiel-Espinosa, 2021).

GeoGebra es también es una tecnología de época, parte de la revolución digital, un hito comparable solo con la invención de la escritura y la imprenta (Serres, 2013). Esta revolución se entiende gracias a las características de las tecnologías digitales que provocaron cambios cualitativos a nivel cultural.

En el caso de GeoGebra, su dinamismo permite ahora ilustrar conceptos matemáticos complejos —como el cálculo del área bajo una curva mediante sumas de rectángulos— de manera accesible, democratizando el aprendizaje de las matemáticas. Antes de su existencia, comprender tales conceptos dependían casi exclusivamente de la capacidad imaginativa del estudiante⁴.

Así también, las tecnologías digitales integran capacidades de las tecnologías de etapas anteriores. En el caso de GeoGebra es posible registrar datos en su hoja de cálculo para generar una gráfica, tarea propia de las etapas estática computaciones o dinámica discreta).

Esta integración de capacidades optimiza el tiempo en el aula: menos tiempo en representar, más tiempo para pensar sobre lo representado. También, permite articular tales características para abordar objetivos matemáticos que sólo tienen sentido en un ambiente dinámico como el de GeoGebra.

En síntesis, y luego de mostrar a GeoGebra en un contexto histórico a través de sus características dinámicas, su intencionalidad, su esencia como una tecnología de época y sus amplias características técnicas, es claro ver que GeoGebra es un destino natural en la relación entre matemáticas y tecnologías.

El paso siguiente en esta relación lo plantea una tecnología digital de otro tipo: la inteligencia artificial. De ahí que la introducción de este libro sea tan acertada y fresca al poner de ejemplo una conversación con ChatGPT sobre el impacto y los beneficios del uso de nuevas tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 17 - 23).

⁴ Ver la construcción del Método de Euler con GeoGebra la Práctica 3b (pp. 72 - 77).

2. El lugar de GeoGebra en la Educación Global

Como se mencionó, las tecnologías digitales han generado una revolución comparable con la invención de la escritura y de la imprenta (Serres, 2013). Cada una de estas transformaciones culturales estuvo marcada por un tipo particular de tecnología: primero el paso de la oralidad al registro escrito, luego la masificación de los textos impresos, y más recientemente el tránsito de lo físico a lo digital.

En este contexto global y tecnológico nace GeoGebra, una herramienta educativa que responde a las demandas de la era digital.

Un factor clave de su éxito es su naturaleza como software libre (GeoGebra, 2025), que garantiza cuatro libertades esenciales a los usuarios del software:

- La libertad de ejecutar el programa como se desee, con cualquier propósito (libertad 0).
- La libertad de estudiar cómo funciona el programa, y cambiarlo para que haga lo que se desee (libertad 1). El acceso al código fuente es una condición necesaria para ello.
- La libertad de redistribuir copias para ayudar a otros (libertad 2).
- La libertad de distribuir copias de sus versiones modificadas a terceros (libertad 3). Esto le permite ofrecer a toda la comunidad la oportunidad de beneficiarse de las modificaciones. El acceso al código fuente es una condición necesaria para ello. (Free Software Foundation, 2025)

En el mismo sentido, los recursos generados con este *software* se consideran Recursos Educativos Abiertos (REA), definidos por la UNESCO como:

Cualquier recurso educativo (incluso mapas curriculares, materiales de curso, libros de estudio, streaming de videos, aplicaciones multimedia, podcasts y cualquier material que haya sido diseñado para la enseñanza y el aprendizaje) que esté plenamente disponible para ser usado por educadores y estudiantes, sin que haya necesidad de pagar regalías o derechos de licencia (Butcher, Kanwar y Uvalic-Trumbic, 2015, p. 5).

Por lo tanto, todos los REA creados con GeoGebra pueden ser usados, modificados y compartidos sin restricciones o barreras monetarias, es decir, de forma completamente gratuita y libre. Esto es posible gracias a que por defecto todos los REA de GeoGebra se publican bajo una licencia *Creative Commons* Atribución-NoComercial-CompartirIgual

(version 3.0 or posterior) (Creative Commons, s.f.).

La libre disposición del *software* GeoGebra y los REA creados con él son los aspectos germinales de su impacto internacional. Explicado en cifras, actualmente el software ha sido traducido por su comunidad a 32 idiomas y es utilizado por más de 100 millones de personas en todo el mundo (UNESCO y *Mahatma Gandhi Institute of Education for Peace and Sustainable Development*, 2019). Además, en 2017 su repositorio superó el millón de REA alojados allí (GeoGebra, 2017).

Este impacto también ha sido documentado por estudios de alcance global, como el *Pedagogy Rethinking* realizado por la UNESCO entre junio de 2018 y octubre de 2019. En este estudio se realizó una revisión global de medios y recursos educativos digitales con el objetivo de hacer un estado del arte sobre la educación digital. Es decir, dar cuenta de lo que se sabe y no se sabe sobre la educación digital, tanto en la investigación como en la práctica educativa.

Se analizaron casos de estudio en cuatro continentes (África, América, Asia y Europa), casi 300 documentos, más de 80 recursos-plataformas, se involucraron a más de 30 expertos internacionales, y se realizaron procesos de revisión por pares.

De esta manera, el estudio sitúa a GeoGebra como una de las tecnologías educativas con mayor impacto en la educación en general, y en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en particular:

Algunos de los recursos educativos digitales más exitosos, en términos de circulación y uso, son los programas de 'producción' o 'construcción' como Scratch, Minecraft, Code.org y GeoGebra, los cuales permiten a los usuarios desarrollar proyectos y escenarios. (p. 19).

Este éxito también se refleja en la producción de REA que realiza la comunidad, lo que convierte a GeoGebra en una tecnología vigente y en constante actualización. Evidencia de esto la encontramos en el mismo estudio, donde entre las más de 80 plataformas analizadas, sólo tres alojan más de un millón de recursos: GeoGebra, Code.org y TEMOA.

Como lo constata el mismo estudio "estas elevadas cifras indican que se trata de recursos vivos, utilizados y actualizados con regularidad" (p. 112). Esto resuena con la importancia del presente manual, puesto que entrega información actualizada del *software* GeoGebra que *permite a profesoras y profesores de habla hispana aprender a usar GeoGebra y co-*

nocer sus últimas novedades.

Estas cifras reflejan el impacto de GeoGebra en la educación global, lo cual es producto de haber aprovechado las características de las tecnologías digitales aunado con las del *software* libre y los REA. Estos en conjunto son los argumentos que han posicionado con méritos a GeoGebra como unas de las tecnologías educativas más importantes y así ocupar un lugar central en la educación global.

3. Recomendación para usar este libro

Una vez presentado el contexto histórico e internacional en el cual se enmarca GeoGebra, corresponde referirme directamente al libro y ofrecer recomendaciones para aprovecharlo al máximo.

Para comenzar me gustaría referirme al objetivo del libro, el cual el autor presenta de manera muy ingeniosa y fresca, mediante una conversación con ChatGPT: “comprender el manejo del software de geometría dinámica (GeoGebra) para desarrollar habilidades y razonamiento tanto matemático como de alfabetización tecnológica” (p. 24).

Además, trata de convencer a su público objetivo —las y los profesores de matemáticas— de la importancia de la capacitación docente en la integración de tecnologías digitales. En palabras de ChatGPT, “el diseño pedagógico eficiente asegura que la tecnología se use de forma significativa y no como una distracción” (p. 21). Este argumento refuerza la idea de que el profesorado es responsable de diseñar prácticas pedagógicas significativas, lo que exige formación en integración digital.

En este sentido, las secciones 1 y 2 de esta presentación complementan la capacitación docente en integración digital ofrecida en el libro, ampliando la información sobre los aspectos técnicos del software GeoGebra con su contexto de desarrollo histórico y posicionamiento global.

Los capítulos restantes ofrecen ejemplos concretos de cómo los docentes pueden integrar GeoGebra a sus clases. De esta forma, el autor cumple con lo prometido: promover que los docentes conozcan técnicamente el *software* GeoGebra, experimenten con prácticas pedagógicas significativas en términos matemáticos, a la vez que desarrollan habilidades de alfabetización digital.

Como se ha señalado anteriormente, GeoGebra también es una comunidad viva y en constante evolución. Evolución que transmite a los términos usados, el sitio web y el mismo

software, lo cual puede dificultar a los nuevos usuarios el acceso a la herramienta. Ante esta situación, el libro realiza un esfuerzo notable por usar un lenguaje preciso y actualizado sobre GeoGebra, mostrar la versión más actualizada del sitio web (en 2025) y guiar paso a paso en procesos básicos como la descarga e instalación del software (*Práctica 0a*, pp. 26 - 30).

Las prácticas constituyen uno de los grandes aportes del libro. Están diseñadas para guiar a los profesores en la exploración del software, explicando qué sucede y por qué, y ofreciendo un espacio para la experimentación. Cada práctica articula aspectos técnicos, matemáticos y didácticos, permitiendo el desarrollo integral de competencias fundamentales para la enseñanza de las matemáticas con tecnología.

El autor organiza el libro y las prácticas de manera temática (ver tabla 1):

Tabla 1.

Organización temática del libro

Tema	Unidad
Introducción a GeoGebra	Unidad 1: ¿Qué es GeoGebra y qué puede hacerse con él?
Aspectos técnicos de GeoGebra	Unidad 2: Las Vistas Gráficas de GeoGebra.
Temas matemáticos específicos con GeoGebra	Unidad 3: La Vista de Cálculo Simbólico. Unidad 4: La Vista de Hoja de Cálculo, su vinculación con las Vistas Gráficas y la Calculadora de Probabilidad.
Lógica de creación de objetos en GeoGebra	Unidad 5: El Protocolo de Construcción.

Finalmente, me permito presentar un orden de lectura alternativo del libro, el cual está orientado para que la profesora y el profesor puedan aprovecharlo según su nivel de *expertiz* en GeoGebra. Esta propuesta la confecciono con base en mi experiencia trabajando con GeoGebra y con profesores en el uso de esta herramienta, además de la cuidada lectura del libro.

Cabe destacar que esta organización por niveles tiene la intención de complementar a la organización temática del autor, para así visibilizar también la versatilidad del presente libro (ver tabla 2).

Tabla 2.*Organización por niveles del libro.*

Nivel	Prácticas
Nivel 1: Introducción	1. Práctica 0a. 2. Práctica 0b. 3. Práctica 0c. 4. Práctica 2a. 5. Práctica 1a. 6. Práctica 1b. 7. Práctica 8a. 8. Práctica 8b. 9. Práctica 8c.
Nivel 2: Intermedio	1. Práctica 3a. 2. Práctica 2b. 3. Práctica 4a. 4. Práctica 4b. 5. Práctica 4c. 6. Práctica 6a. 7. Práctica 6b. 8. Práctica 5a. 9. Práctica 5b. 10. Práctica 5d. 11. Práctica 7b.
Nivel 3: Avanzado	1. Práctica 3b. 2. Práctica 4d. 3. Práctica 5c. 4. Práctica 6c. 5. Práctica 7a.

En suma, este manual no solo introduce GeoGebra de manera técnica, sino que acompaña a las y los docentes en un proceso formativo que integra matemáticas, pedagogía y alfabetización digital. Es, sin duda, una herramienta valiosa para la comunidad educativa hispanohablante, lo cual merece todo el reconocimiento y mis felicitaciones para su autor.

Cdto. a Dr. Sergio Rubio-Pizzorno⁵
 Cholula, Puebla, México
 20 de agosto de 2025

⁵ Sergio Rubio-Pizzorno es socio de la Sociedad Mexicana para la Divulgación de la Ciencia y la Técnica (SOMEDICyT), miembro asociado del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) y miembro del Instituto GeoGebra Internacional. Actualmente colabora con el Centro de Cultura Digital de la Secretaría de Cultura conduciendo el podcast “Aula Abierta”, un espacio para explorar lo digital desde una perspectiva educativa. <https://about.me/sergiorubio>

Referencias

- Butcher, N., Kanwar, A., y Uvalic-Trumbic, S. (2015). Guía básica de recursos educativos abiertos (REA). París, Francia: *Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO)*. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000232986>
- Creative Commons. (s.f.). *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported Legal code*. Creative Commons. <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/legal-code>
- Free Software Foundation. (2025, 26 de mayo). *¿Qué es el software libre?* <https://www.gnu.org/philosophy/free-sw.html>
- Freiman, V. (2020). Types of Technology in Mathematics Education. In: S. Lerman, (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 869-879). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_158
- GeoGebra. (2017, 20 de noviembre). *Find over 1 million free and interactive classroom resources on [geogebra.org/materials](https://www.geogebra.org/materials). Search for a topic and share!* [Tweet]. X (anteriormente Twitter). <https://twitter.com/geogebra/status/932586021010714624>
- GeoGebra. (2025). *GeoGebra License*. <https://www.geogebra.org/license>
- Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Tesis de maestría no publicada. Universität Salzburg.
- Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., y Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 99-111. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9116-6>
- Pinch, T. (2015). La construcción social de la tecnología: Una revisión. En M. J. Santos y R. Díaz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales: Perspectivas teóricas* (Primera edición electrónica, pp. 18-37). Fondo de Cultura Económica; Biblioteca física personal. <https://www.fondodeculturaeconomica.com/Ficha/9786071646194/F>
- Pletser, V. y Huylebrouck, D. (1999). The Ishango artefact: the missing base 12 link. *Forma*, 14(4), 339-346. <https://forma.katachi-jp.com/pdf/1404/14040339.pdf>
- Roberts, D. L.; Leung, A. Y. L. y Lins, A. F. (2013). From the Slate to the Web: Technology

in the Mathematics Curriculum. En: M. A. Clements; A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education*, pp. 525 – 547. Springer Science+Business Media, New York, USA.

Rubio-Pizzorno, S., y Montiel-Espinosa, G. (2021). Ambientes Virtuales de Aprendizaje contruidos socialmente con Herramientas de Autor de GeoGebra. *Innovaciones Educativas*, 23(34), 213-227. <https://doi.org/10.22458/ie.v23i34.3432>

Serres, M. (2013). *Pulgarcita: El mundo cambió tanto que los jóvenes deben reinventar todo: una manera de vivir juntos, instituciones, una manera de ser y conocer...* Fondo de Cultura Económica. <https://www.fondodeculturaeconomica.com/Ficha/9789505579761/F>

UNESCO y Mahatma Gandhi Institute of Education for Peace and Sustainable Development. (2019). *Rethinking pedagogy: Exploring the potential of digital technology in achieving quality education*. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000372786>

Prólogo

La presente obra es un manual centrado en los usos y bondades del software GeoGebra en su versión 5.0. Inicialmente las prácticas fueron elaboradas con el fin de utilizarse como una introducción a las diversas características y funcionalidades que ofrece el programa para cursos del profesorado de Matemáticas en espacios formativos como talleres en congresos y cursos de maestría, en temas referentes a Geometría, Álgebra, Cálculo, Métodos numéricos, Estadística, entre otros. Posteriormente, las prácticas se refinaron gracias a los comentarios, sugerencias y preguntas de los profesores participantes en estos espacios formativos, permitiendo así dar una retroalimentación a la versión inicial.

La organización de este manual consiste en prácticas separadas en cinco unidades, las cuales son las siguientes:

Unidad 1: ¿Qué es GeoGebra y qué puede hacerse con él?

Esta unidad consiste en 2 prácticas:

- *Práctica 0:* se comenzará con un recorrido a través del sitio oficial de Internet de GeoGebra, cómo descargar el programa en diversos dispositivos y sistemas operativos y se explorará la interfaz del programa y los diferentes menús, opciones y características de la versión 5.0 de GeoGebra.
- *Práctica 1:* en esta práctica elaborarán 2 construcciones, para ejemplificar la diferencia entre los dos principales tipos de éstas que pueden ser Rígidas y No Rígidas, esto se realizará mediante construcciones de Geometría Euclidiana.

Unidad 2: Las Vistas Gráficas de GeoGebra.

Esta unidad consiste en 3 prácticas:

- *Práctica 2:* esta práctica consiste principalmente en la utilización de la Vista Gráfica de GeoGebra, comenzando a utilizar formato en las construcciones, textos y el uso de condicionales para mostrar objetos, se realizarán dos construcciones centradas en el tema de la ecuación de la recta y sistemas de ecuaciones lineales.
- *Práctica 3:* para el desarrollo las construcciones de esta práctica, se utiliza la construcción de herramientas dinámicas de mayor precisión, se habla sobre la sintaxis de los comandos y se muestra además como realizar construcciones con base en se-

cuencias, el tema central de estas construcciones es el trazo de rectas y perpendiculares y el tema del Método de Euler utilizado en Cálculo y Métodos numéricos.

- *Práctica 4:* en esta práctica se explora la nueva característica de GeoGebra 5.0, la Vista Gráfica 3D, que permite la visualización de objetos tridimensionales, planos, rectas y funciones multivariantes, el tema principal serán las funciones multivariable y su representación gráfica.

Unidad 3: La Vista de Cálculo Simbólico.

- *Práctica 5:* en esta práctica se explora la vista de CAS, Cálculo Simbólico, la cual es una poderosa herramienta que permite realizar operaciones, despejes, sustituciones, entre otras cosas, y puede vincularse con las vistas gráficas.

Unidad 4: La Vista de Hoja de Cálculo, su vinculación con las Vistas Gráficas y la Calculadora de Probabilidad.

- *Práctica 6:* en esta práctica se estudia la vista de Hoja de Cálculo, muy similar a software MS Excel, la cual permite realizar análisis estadísticos de conjuntos de datos y vincularla con las vistas gráficas.
- *Práctica 7:* en esta práctica se explora la Calculadora de Probabilidad, muy enlazada con la vista de Hoja de Cálculo y se realizan algunos comandos de cálculos básicos y distribuciones.

Unidad 5: El Protocolo de Construcción.

- *Práctica 8:* en esta práctica se estudia el Protocolo de Construcción, una herramienta que permite visualizar cómo se realizó una construcción previamente creada paso por paso, visualizando los comandos ejecutados y sus efectos a modo de línea del tiempo. Esto permite a los interesados en construir sus propias herramientas el aprender a utilizar otras herramientas.

Espero que este manual te permita desarrollar habilidades y destrezas para el uso de esta herramienta de software; y como prospectiva sea la base para diseñar propuestas de actividades didácticas en beneficio de tu labor docente, donde la tecnología digital sea un medio para potencializar el desarrollo de competencias matemáticas y de pensamiento crítico en tus estudiantes.

Dr. Jesús Eduardo Hinojos Ramos

Introducción

Las tecnologías digitales y la Internet para el aprendizaje de las matemáticas no son tema reciente de discusión, se tiene como base que, al menos, desde antes del año 2000 (más de 20 años) existe preocupación por este tema, tal como puede evidenciarse en las investigaciones de Artigue (2002), Klincksik (2003), López et al (2017), More (2017), van der Wal et al. (2017), Esparza (2018) y Sánchez y Esparza (2020). Así mismo, con referencia en la base de datos sobre formación de Ingenieros de Torres-Corrales e Hinojos (2023), puede identificarse que en los últimos sesenta años este tema es de interés en la formación matemática de estos profesionales. Además, el uso de este tipo de herramientas es considerado una habilidad o competencia matemática desde el punto de vista del modelo Kom de Niss y Højgaard (2019).

En la actualidad (a 2024), la discusión va en sentido hacia la incorporación de la Inteligencia Artificial (IA) para fines de aprendizaje, si bien la discusión acerca de su impacto y la ética respecto a su uso son debate vigente y que ha dado mucho fruto en el ámbito de la Educación y la Matemática Educativa, aquí aprovecharemos este espacio de Introducción para platicar con el conocido ChatGPT acerca del tema.

JEHR: Buen día Bot, en esta ocasión necesito que me hables en lenguaje científico, haciendo referencia y citando investigaciones publicadas a nivel mundial acerca de “el impacto y beneficios que tiene el uso de nuevas tecnologías digitales en el aula de matemáticas”, te haré preguntas con base en los planteamientos que me menciones. El objetivo de esto es convencer a los lectores del “Manual Básico de GeoGebra” de adoptar estas tecnologías tanto para la enseñanza como para el aprendizaje.

Bot: El uso de tecnologías digitales en la educación matemática ofrece varios beneficios, tanto en términos de aprendizaje conceptual como de motivación y habilidades prácticas. Investigaciones han demostrado que herramientas digitales, como software de visualización y plataformas interactivas, fomentan la autonomía del estudiante y promueven un enfoque constructivista en el aula, donde los alumnos exploran conceptos matemáticos en lugar de limitarse a recibir instrucción pasiva. Esto genera un entorno más participativo y mejora la comprensión de ideas abstractas a través de la experimentación y la modelización (Geiger et al., 2010; Psycharis, et al. 2013).

Además, la incorporación de tecnologías permite el diseño de actividades más auténticas que requieren matemáticas para resolver problemas reales, aumentando la relevancia

percibida de la materia. Estas actividades transforman el aprendizaje al facilitar múltiples caminos para la resolución de problemas, empoderando a los estudiantes en su proceso educativo y aumentando su confianza y disfrute de la disciplina (Hoyles y Lagrange, 2010; Boaler, 1993).

En términos de impacto académico, un metaanálisis realizado por Li y Ma (2010) muestra que los estudiantes que utilizan tecnología en sus clases de matemáticas suelen presentar mejoras significativas en su desempeño en comparación con aquellos que siguen métodos tradicionales. Las herramientas digitales pueden actuar tanto como medios pragmáticos para acelerar cálculos y reducir errores, como recursos epistemológicos que enriquecen la comprensión conceptual del estudiante (Artigue, 2002).

Sin embargo, la efectividad del uso de tecnología depende del diseño pedagógico y la preparación del docente. La transición hacia una pedagogía más investigativa requiere una transformación en las prácticas docentes, y esto puede ser un desafío en entornos donde prevalecen modelos tradicionales de enseñanza (Ertmer y Ottenbreit-Leftwich, 2010). Por tanto, la capacitación de los docentes y el desarrollo de tareas que aprovechen genuinamente la tecnología son esenciales para maximizar su impacto en el aprendizaje (Olive et al., 2010; Ruthven et al., 2008).

En conclusión, adoptar tecnologías digitales como GeoGebra puede enriquecer la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas, siempre y cuando se integre en un contexto pedagógico apropiado. Esto no solo mejora el rendimiento académico, sino que también hace que los estudiantes se sientan más comprometidos con el contenido y disfruten del proceso educativo.

JEHR: Gracias Bot, te haré algunas preguntas sobre lo que me planteas: El hecho de que existan este tipo de herramientas a su disposición en todo momento, ¿podrían fomentar que el estudiante deje de pensar matemáticamente al resolver problemas y confíe ciegamente en el resultado que se le proporcione? ¿qué otro tipo de habilidades recomiendas desarrollar en lugar del enfoque en lo algorítmico? ¿qué tipo de actividades “más auténticas” recomiendas? ¿por qué es necesaria la preparación docente y un eficiente diseño pedagógico?

Bot: 1. *¿Podrían estas herramientas hacer que los estudiantes confíen ciegamente en los resultados y dejen de pensar matemáticamente?*

Sí, este es un riesgo real si las herramientas tecnológicas se utilizan sin un enfoque pe-

dagógico adecuado. Algunos estudios señalan que cuando los estudiantes dependen excesivamente de la tecnología, existe la posibilidad de que no desarrollen habilidades críticas como la capacidad de estimación o el razonamiento lógico (Laborde et al., 2006; Ruthven et al., 2008). Sin embargo, investigaciones más recientes destacan que la tecnología no tiene que ser una amenaza, sino un complemento. Lo importante es evitar su uso mecánico y diseñar actividades que fomenten la interpretación de los resultados obtenidos y que incentiven preguntas como: "¿Tiene sentido esta respuesta?" o "¿Cómo llegué aquí?". Esto promueve habilidades metacognitivas esenciales para pensar matemáticamente (Olive et al., 2010).

2. ¿Qué habilidades es recomendable desarrollar más allá del enfoque algorítmico?

El enfoque en lo algorítmico es importante, pero es fundamental complementarlo con habilidades de razonamiento, creatividad y resolución de problemas. Entre las competencias recomendadas están:

- Habilidades de modelación: Plantear problemas del mundo real usando conceptos matemáticos.
- Pensamiento crítico: Evaluar la validez de diferentes estrategias y resultados.
- Capacidad para visualizar: Utilizar gráficos y simulaciones para comprender conceptos abstractos.
- Colaboración y trabajo en equipo: En entornos digitales colaborativos como GeoGebra, los estudiantes pueden explorar juntos. Estas habilidades favorecen un aprendizaje más profundo y significativo (Hoyles y Lagrange, 2010)

3. ¿Qué tipo de actividades "más auténticas" recomiendas?

Las actividades auténticas son aquellas que reflejan problemas reales y relevantes para los estudiantes. Algunos ejemplos incluyen:

- Proyectos interdisciplinarios: Diseñar modelos matemáticos para optimizar recursos, como en problemas de ingeniería.
- Simulaciones interactivas: Usar tecnología para modelar fenómenos físicos o ambientales (e.g., movimientos de fluidos).
- Retos matemáticos aplicados: Problemas que requieren optimización, como minimizar costos en una producción industrial o maximizar la eficiencia energética.

Estas actividades permiten a los estudiantes experimentar con la matemática como una

herramienta para la toma de decisiones, en lugar de verla solo como un conjunto de procedimientos (Confrey y Maloney, 2007; Foster, 2013)

4. ¿Por qué es necesaria la preparación docente y un diseño pedagógico eficiente?

La preparación docente es crucial porque el papel del profesor cambia drásticamente en un entorno con tecnologías digitales. En lugar de ser la fuente de conocimiento, el docente debe convertirse en un facilitador que guía a los estudiantes hacia un aprendizaje autónomo. Esto requiere no solo habilidades técnicas, sino también un cambio en la filosofía pedagógica, promoviendo prácticas más explorativas y menos centradas en la transmisión de contenidos (Ertmer y Ottenbreit-Leftwich, 2010).

Además, el diseño pedagógico eficiente asegura que la tecnología se use de forma significativa y no como una distracción. Las actividades deben estar alineadas con objetivos claros que desarrollen habilidades más allá de los algoritmos y promuevan un aprendizaje conceptual profundo (Ruthven et al., 2008). Un mal uso de la tecnología puede perpetuar los problemas tradicionales de la enseñanza, como la memorización sin comprensión, o incluso generar frustración en los estudiantes si las herramientas no se integran adecuadamente. En conclusión, la preparación y el diseño pedagógico son indispensables para que las tecnologías digitales potencien, en lugar de obstaculizar, el pensamiento matemático.

JEHR: Gracias Bot, por favor, proporcióname todas las referencias citadas en formato APA y las páginas donde consultarlas.

Bot: Aquí tienes las referencias en formato APA de las investigaciones y artículos mencionados, junto con las fuentes donde fueron consultadas:

Referencias en formato APA:

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Boaler, J. (1993). Encouraging the transfer of school mathematics to the real world through the integration of process and content, context and culture. *Educational Studies in Mathematics*, 25(4), 341-373.

- Confrey, J., & Maloney, A. P. (2007). A framework for assessing student understanding in mathematics. *Educational Designer*, 1(1).
- Ertmer, P. A., & Ottenbreit-Leftwich, A. T. (2010). Teacher technology change: How knowledge, confidence, beliefs, and culture intersect. *Journal of Research on Technology in Education*, 42(3), 255-284.
- Foster, C. (2013). Mathematical études: Embedding opportunities for developing procedural fluency within rich mathematical contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 765-774.
- Geiger, V., Goos, M., & Forgasz, H. (2010). A review of mathematics education research on technology. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 17(3), 95-102.
- Hoyles, C., & Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Springer Science & Business Media.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275-304). Sense Publishers.
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22(3), 215-243.
- Olive, J., et al. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. En C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 133-177). Springer Science & Business Media.
- Ruthven, K., Hennessey, S., & Deane, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, 51(1), 297-317.

Ubicaciones de consulta:

- Repositorio Griffith University.
- Research Repository de Trinity College Dublin TARA

Estas referencias y sitios de consulta te permitirán profundizar en los temas discutidos, con un enfoque en los impactos, riesgos y beneficios del uso de tecnologías digitales en la enseñanza de matemáticas.

JEHR: Gracias Bot, me parece adecuado e ilustrativo lo que mencionas, compartiré este chat con los lectores del libro.

Bot: ¡De nada! Me alegra saber que la información será útil para los lectores del manual. Si necesitas más apoyo o alguna otra referencia en el futuro, no dudes en pedírmelo. ¡Éxito con tu proyecto y que la incorporación de GeoGebra y las tecnologías digitales en el aula de matemáticas inspire a muchos!

(Puedes consultar la conversación completa en la siguiente liga <https://chatgpt.com/share/670d95c1-0700-8002-8ddc-89650e941e95>)

Como podemos ver, la tecnología digital en el aula de matemáticas no es una amenaza, sino una herramienta a nuestra disposición, que permite enfocarse en otros aspectos que, previamente, eran descuidadas en la enseñanza tradicional, el reto que tenemos ante nosotros es la profesionalización docente y el manejo de estas herramientas, por lo que se plantea como objetivo de esta obra: *comprender el manejo de software de geometría dinámica (GeoGebra) para desarrollar habilidades y razonamiento tanto matemático como de alfabetización tecnológica para el docente de matemáticas*. Para ello se desarrollarán diversos ejercicios con el software y preguntas de reflexión que te permitirán comprender el funcionamiento de las distintas características actuales del mismo. Como método de autoaprendizaje, se incluye en el Anexo A un formato de reporte, el cual podrás usar como notas para monitorear tu progreso.

Nota: algunas de las referencias proporcionadas están incorrectas en formato APA, y la citación en una de las referencias es incorrecta, además en el listado de referencias, ChatGPT omitió una de ellas. Con lo cual aclaramos nuestro punto acerca de la tecnología como herramienta donde es necesario que el usuario revise detenidamente la información que proporciona (ChatGPT en este caso, pero puede ser cualquier otra herramienta de tecnología digital) antes de copiar la información y utilizarla. En el listado de referencias al final del libro se realizan las correcciones y se agregan los identificadores de objeto digital (DOI en inglés) a la información proporcionada por la IA.

UNIDAD 1

¿Qué es GeoGebra y qué puede hacerse con él?

GeoGebra es una plataforma de software matemático dinámico que combina Geometría, Álgebra, Cálculo, Probabilidad y Estadística en un solo entorno. Fue creada en 2001 por Markus Hohenwarter, un matemático y programador austriaco, durante su proyecto de tesis en la Universidad de Salzburgo. Desde entonces, ha evolucionado hasta convertirse en una de las herramientas educativas más utilizadas en matemáticas y ciencias en todo el mundo (Bray y Tangney, 2017).

El entorno de GeoGebra se compone de interfaces llamadas Vistas, y una de las principales aplicaciones del programa es generar construcciones que posteriormente pueden ser modificadas de manera dinámica a través de la modificación de parámetros. Además, se trata de una herramienta gratuita, libre y de código abierto, y dispone de versiones para navegador en línea y de escritorio, y calculadoras para dispositivos móviles para Android e iOS.

GeoGebra es altamente adaptable a los distintos niveles educativos (desde educación básica hasta superior) y metodologías de aprendizaje (como aula invertida, aprendizaje basado en proyectos o aprendizaje basado en descubrimientos) y cuenta con una comunidad amplia y activa en su página y foros oficiales donde se comparten recursos, estrategias, simulaciones y lecciones interactivas disponibles de forma gratuita.

En esta práctica introductoria, más que aprender a utilizar el programa, se verá cómo acceder a él, descargarlo e instalarlo, cómo registrar una cuenta en la página y dónde consultar los recursos disponibles creados por otros usuarios.

Práctica 0 – Introducción a GeoGebra

Práctica 0a – Cómo instalar GeoGebra

Instrucciones de instalación:

- 1) Ingresa a la dirección web: <https://www.geogebra.org/>, el idioma de la página será el mismo que tengamos configurado en la computadora y se visualizará como la figura 1.



Figura 1. Inicio de la página oficial de GeoGebra.

En esta página de inicio, se dispone de varios enlaces, los principales que veremos son el de "Iniciar Calculadora" el cual abrirá la versión web de GeoGebra y "Recursos Matemáticos" donde podremos consultar material de otros usuarios.

- 2) En lugar de dar clic sobre las opciones que se nos muestran, daremos clic sobre el menú desplegable de Calculadoras, ubicado en la parte superior de la ventana como se muestra en la figura 2.



Figura 2. Menú desplegable de Calculadoras.

- 3) En este menú daremos clic sobre Descargas, lo cual nos va a redirigir hacia la página que se muestra en la figura 3.

Aplicaciones de GeoGebra

Explora nuestras calculadoras y aplicaciones gratuitas para matemáticas y ciencias, disponibles para todos los dispositivos y sistemas operativos. Comienza a usar nuestra Suite de Calculadoras todo en uno.

Comenzar en el navegador

Descargar

Todas las opciones de descarga

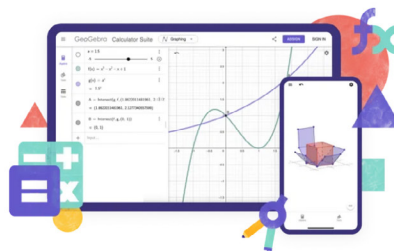


Figura 3. Página de Descargas de GeoGebra.

- 4) Exploraremos más abajo en la página, donde encontraremos la liga para descargar GeoGebra Clásico 5, que es el programa que se utiliza para construcciones más avanzadas y recibe de forma automática las mismas actualizaciones que las versiones 6 y de navegador, el lugar específico de la descarga se muestra en la figura 4.

¿Estás creando recursos avanzados de GeoGebra?

Clásico 5 para características avanzadas

Descargar

Todas las opciones de descarga



Figura 4. Descarga de GeoGebra Clásico 5.

- 5) Da clic en Descargar y automáticamente iniciará la descarga de acuerdo con la versión de tu sistema operativo. El archivo descargado tendrá un nombre similar a este: [GeoGebra-Windows-Installer-5-2-861-0.exe](#).

De igual forma, si haces clic sobre la liga de Todas las opciones de descarga, se redirigirá automáticamente a otra página donde se pueden descargar los módulos individuales de GeoGebra.

- 6) Una vez descargado, ejecutaremos el instalador, daremos clic en "Sí" a la validación de permisos de usuario (a menos que ejecutemos como administrador), se abrirá entonces el asistente de instalación de GeoGebra como se muestra en la figura 5.

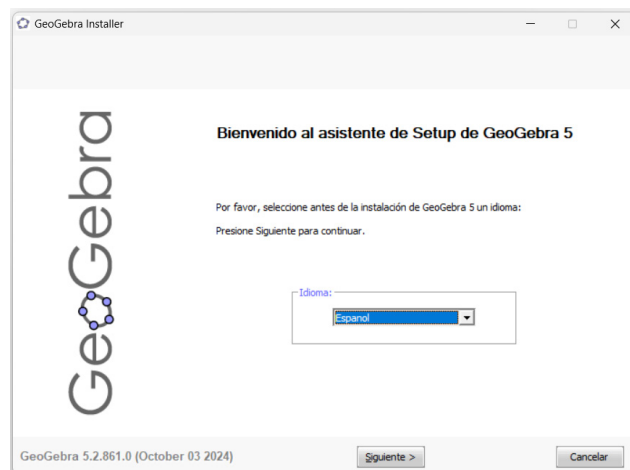
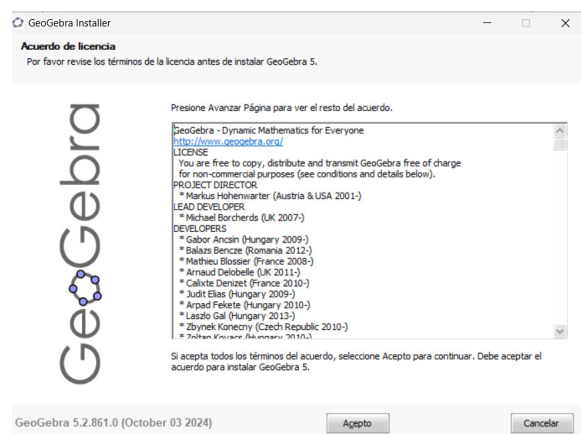


Figura 5. Asistente de instalación de GeoGebra.

- 7) Elegimos el idioma y damos clic en siguiente (nota: el manual está escrito considerando el idioma Español).
- 8) Damos clic en Acepto para los Acuerdos de Licencia, figura 6.



- 9) Elegimos la opción Estándar y damos clic en Instalar.
- 10) Esperamos a que se instale el programa, esto puede llevar un par de minutos, como se muestra en la figura 7.

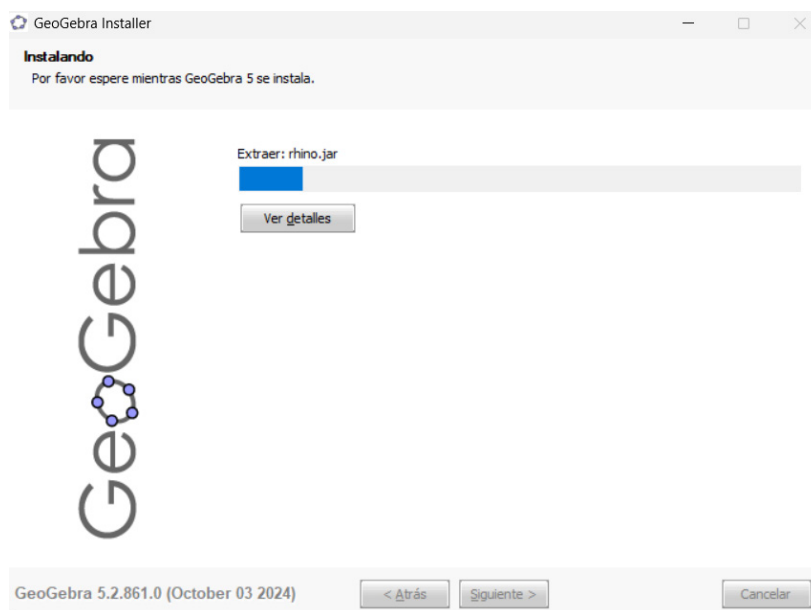


Figura 7. Instalación de GeoGebra.

- 11) Una vez que termine la instalación, damos clic en Terminar y ejecutamos el programa, como se muestra en la figura 8.

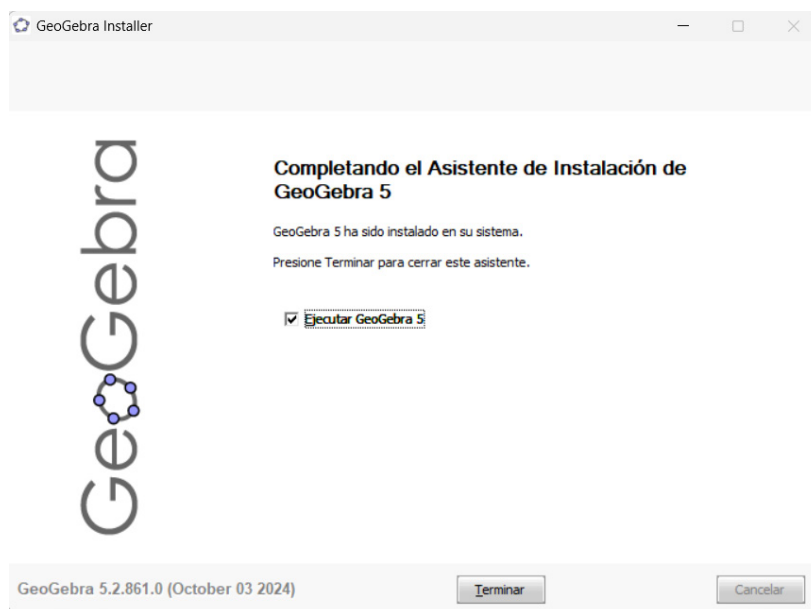


Figura 8. Término de la instalación de GeoGebra.

12) Se abrirá GeoGebra clásico en su versión para escritorio, la interfaz por defecto se muestra en la figura 9.

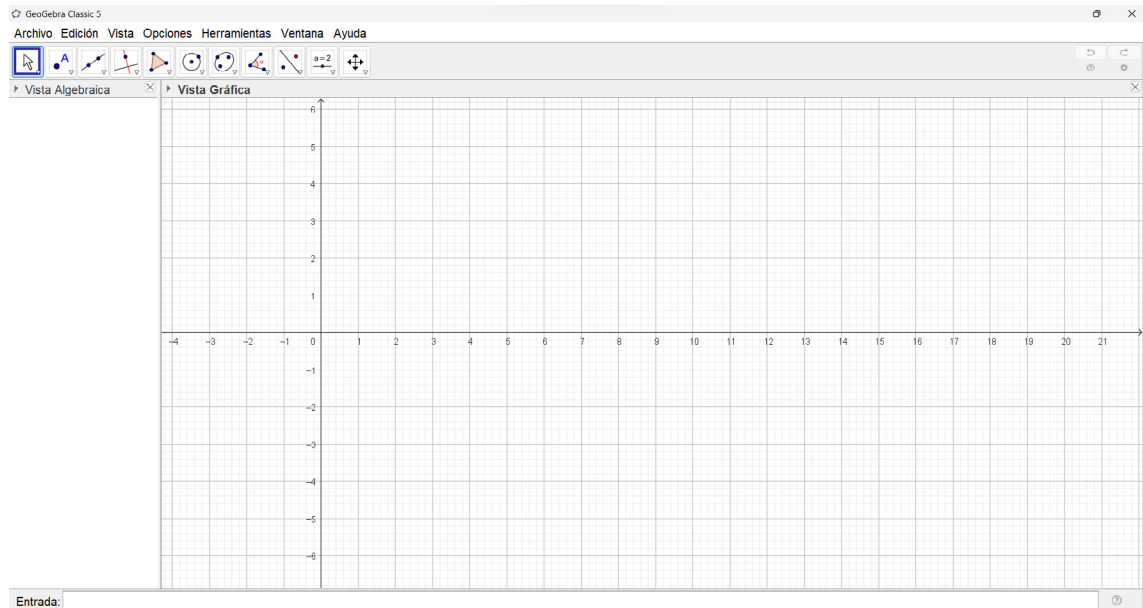


Figura 9. Pantalla principal de GeoGebra.

Práctica 0b – Cómo registrar una cuenta en GeoGebra

Instrucciones:

- 1) Ingresa a la dirección web: <https://www.geogebra.org/>, y da clic sobre el botón Conectar, ubicado en la esquina superior derecha de la página, como se muestra en la figura 10.



Figura 10. Ubicación del botón Conectar.

- 2) Se mostrarán las distintas opciones de inicio de sesión, puedes elegir la que prefieras, recomendamos registrar con Google para vincular tu cuenta de Gmail con tu cuenta de GeoGebra, como se muestra en la figura 11.

Figura 11. Opciones de inicio de sesión.

- 3) Seguimos los pasos en pantalla para confirmar el registro, dependiendo de nuestras configuraciones de seguridad puede requerir verificación en dos pasos.
- 4) Cuando solicite confirmar la política de privacidad y términos de servicio, damos clic en Continuar, como se muestra en la figura 12.

Si continúas, Google compartirá tu nombre, tu dirección de correo electrónico, tu preferencia de idioma y tu imagen de perfil con GeoGebra. Consulta la [Política de Privacidad](#) y los [Términos del Servicio](#) de GeoGebra.

Puedes gestionar Iniciar sesión con Google en tu [cuenta de Google](#).



Figura 12. Políticas de privacidad y Términos de servicio de GeoGebra.

- 5) Se redirigirá automáticamente a la página principal de GeoGebra, pero ahora en lugar del botón de Abrir sesión, aparecerá la foto de perfil de nuestro correo de Gmail o cuenta de Google en la esquina superior derecha.
- 6) Da clic sobre tu foto de perfil, esta te dirigirá automáticamente a tu perfil el cual podrás editar y también podrás cargar y hacer un respaldo de tus construcciones en la nube desde el software.

El respaldo en la nube se puede realizar desde el programa de GeoGebra, dando clic sobre el menú Archivo (esquina superior izquierda del programa) y posteriormente en la opción Guardar en la nube, como se muestra en la figura 12.

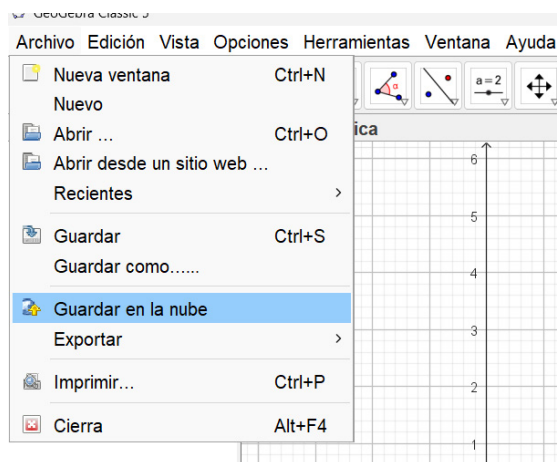


Figura 12. Carga en la nube de las construcciones.

Se abrirá automáticamente la página de GeoGebra y permitirá editar información de la construcción que se guardará en nuestro perfil dando clic en Guardar, esto se muestra en la figura 13.

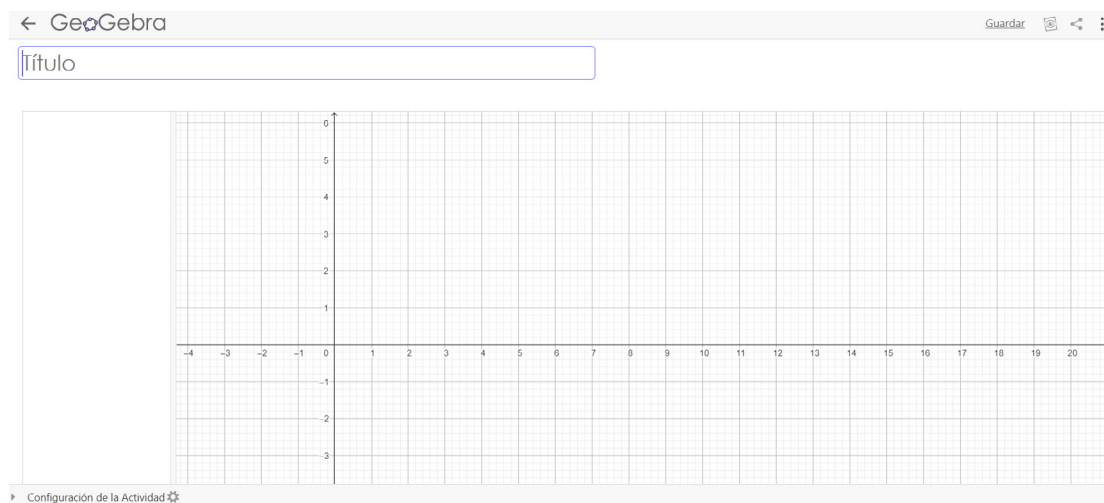


Figura 13. Página de carga en la nube de GeoGebra.

Práctica 0c – Dónde consultar material didáctico de otros usuarios de GeoGebra

- 1) Ingresa a la dirección web: <https://www.geogebra.org/>.
- 2) En la página principal, da clic sobre el botón Recursos Matemáticos, ubicado en la parte central de la página, esto redirige a la ventana que se muestra en la figura 14.

Recursos matemáticos GeoGebra

Encuentra recursos matemáticos gratuitos y listos para usar en álgebra, geometría, sentido numérico, mediciones, operaciones, probabilidad y estadística en los grados 4 a 8 (11 a 15 años de edad), para mejorar la exploración y la práctica de tus estudiantes.

[Ir a todos los Recursos](#)



Figura 14. Ventana del navegador de recursos matemáticos.

- 3) Si navegamos más abajo en la página observaremos lo que se muestra en la figura 15, que permite consultar recursos por tema y más abajo podemos consultar los recursos destacados.



Figura 15. Recursos por tema.

- 4) Si exploramos más abajo encontraremos la sección listada como Todos los Recursos, como se muestra en la figura 16, los cuales se catalogan por temas y rango de edades.

Todos los recursos

Explora la amplia variedad de recursos creados por el Equipo de Contenidos de GeoGebra para abordar las necesidades educativas de tus estudiantes.

Figura 16. Portal con todos los Recursos.

- 5) Si navegamos más abajo, observaremos una sección llamada Recursos de la Comunidad, donde podremos explorar los recursos elaborados por otros usuarios de GeoGebra dando clic sobre el botón Explora más, esto se muestra en la figura 17 y nos redirige a la página de la figura 18.



Figura 17. Inicio de Recursos de la Comunidad de GeoGebra.

Recursos

¡Accede gratuitamente a más de un millón de actividades, simulaciones, ejercicios, lecciones y juegos para matemática y ciencia!

Recursos destacados

[MOSTRAR TODO](#)



Figura 18. Mapa de Recursos de la Comunidad.

- 6) Si damos clic sobre los botones grises podemos explorar un diagrama de árbol de temas y subtemas de matemáticas, así como acceder a los recursos creados para eventos de la comunidad.
- 7) Da clic sobre el botón gris Funciones, esto te redirigirá a la siguiente rama del árbol y mostrará los recursos destacados relacionados con el tema, esto se muestra en la figura 19.

Funciones

Tema padre: Cálculo, Matemática

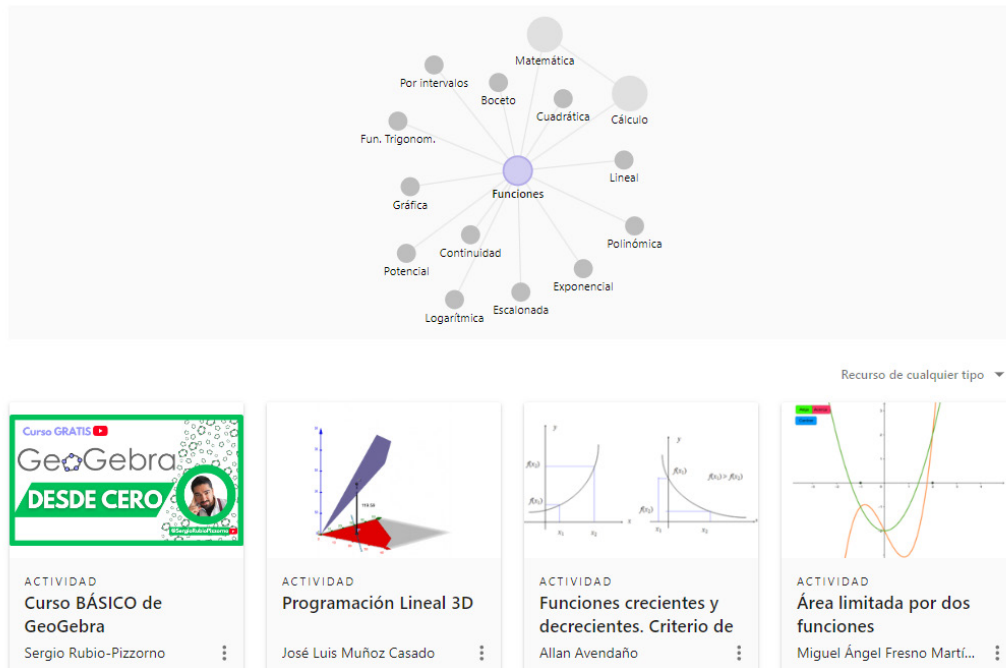


Figura 19. Subtemas dentro del tema de Funciones.

Hasta aquí, hemos terminado lo básico de la instalación del software y la exploración de la página, finalizamos invitándote a seguir explorando los distintos recursos y opciones existentes dentro de la página. Dicho esto, ahora comenzaremos con las prácticas de GeoGebra Clásico 5, versión de escritorio.

Para saber más:

Curso Básico de GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/m/sbhvxpfj>

Manual de Usuario de GeoGebra (español e inglés):

<https://geogebra.github.io/docs/manual/es/>

<https://geogebra.github.io/docs/manual/en/>

Todas las descargas de GeoGebra:

https://geogebra.github.io/docs/reference/en/GeoGebra_Installation/

Práctica 1 - Construcciones Rígidas y construcciones no rígidas en GeoGebra

En GeoGebra existen diversos tipos de Vistas, un archivo realizado en GeoGebra se denomina Construcción o *applet*, y éstas pueden realizarse utilizando una o más de las Vistas al mismo tiempo, dando una gran ventaja con respecto a la visualización y capacidad de vinculación de registros, al guardarse en la computadora estas construcciones tienen la extensión “.ggb” y pueden abrirse desde el software o bien desde la versión para navegador web.

Antes de la versión 4 de GeoGebra, todo objeto se clasificaba como: Objeto libre u Objeto dependiente, existía además una tercera clase de objetos llamados *Objetos Fijos* una subcategoría de los dependientes. Los objetos libres al ser insertados podían moverse con total libertad a lo largo y ancho de la Vista Gráfica, por ejemplo: un punto sobre el plano. Por otra parte, los dependientes sólo podían hacerlo de forma acotada según la relación de dependencia que se establecía, por ejemplo: un punto sobre una recta o una intersección entre objetos.

En la actualidad, esta forma de clasificar los objetos ya no está vigente, pues a partir de la versión 4 todos los objetos fueron separados en diversas categorías como: Puntos, rectas, funciones, cónicas, etc. Actualmente en la versión 5, esta categorización ha desaparecido (aunque puede visualizarse en las opciones avanzadas) y todo aparece listado de forma continua. Al no existir la categoría de objetos dependientes e independientes, se necesita otra forma de clasificar las construcciones que se realizan, una forma sencilla es la que proponemos a continuación: Construcciones Rígidas (CR) y No Rígidas (CNR).

Una CNR es aquella que, al modificar una parte, se modifica toda la construcción, una CR no cambia la forma de su construcción, pero si puede cambiar su tamaño o ángulos. Por ejemplo: un cuadrilátero en CNR puede convertirse en cualquier figura de 4 lados, pero en CR podría ser siempre un cuadrado (todos los lados iguales sin importar qué tanto se estire).

Práctica 1a

Instrucciones:

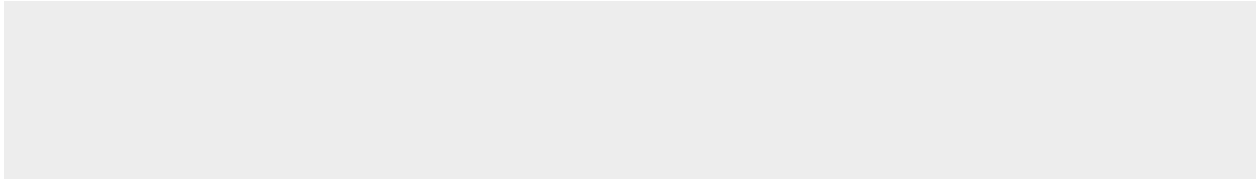
- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra.
- 2) Oculta los ejes y la cuadrícula; cierra la Vista Algebraica y deja únicamente activa la Vista Gráfica 1.
- 3) Utilizando la herramienta Punto, inserta 3 puntos sobre la Vista Gráfica 1.
- 4) Une los 3 puntos entre sí utilizando la herramienta Segmento (segunda opción del submenú de la herramienta Recta) de tal manera que forme un triángulo.
- 5) Mueve los puntos de tal forma que obtengas:
 - Un triángulo rectángulo.
 - Un triángulo isósceles.
 - Un triángulo equilátero.
- 6) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 7) Guarda la construcción con el nombre Practica1a y abre una nueva ventana de GeoGebra.

Práctica 1b

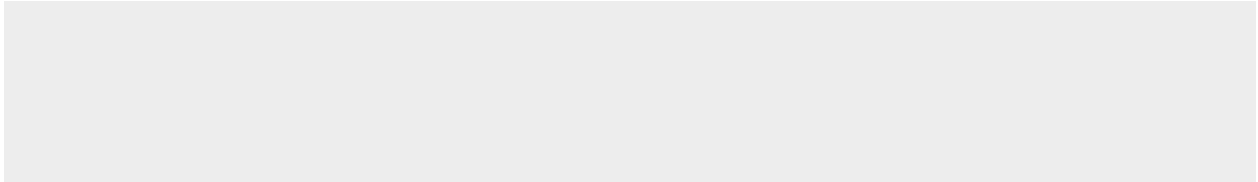
Instrucciones:

- 1) Oculta los ejes y la cuadrícula; cierra la Vista Algebraica (si está activa) y deja únicamente activa la Vista Gráfica 1.
- 2) Inserta 2 puntos en cualquier lugar de la Vista Gráfica 1 utilizando la herramienta Punto, sus nombres serán A y B.
- 3) Traza una recta que pase por ambos puntos utilizando la herramienta Recta.
- 4) Oculta el punto B (clic derecho sobre el punto y la Opción Objeto visible) y responde:

- ¿Qué ocurre con la recta al ocultar el punto?

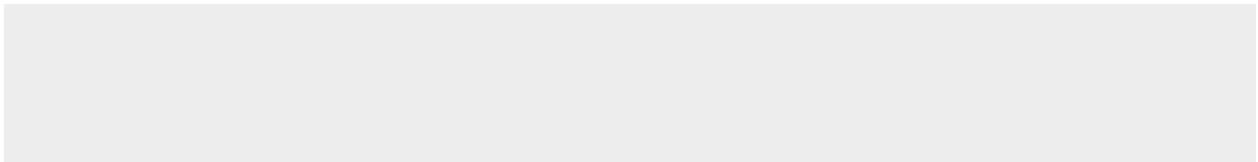


- ¿Qué ocurre con la recta al mover el punto A (que no se ocultó)?

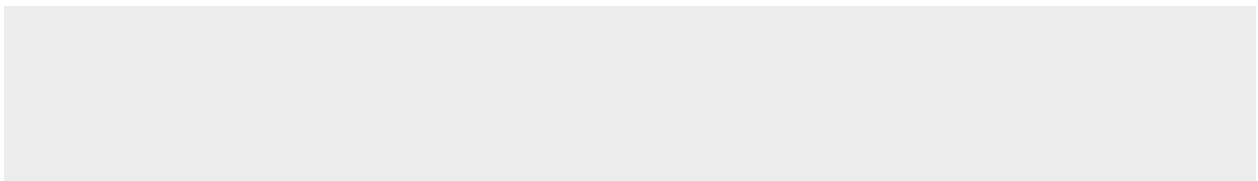


- 5) Traza una perpendicular al punto A y la recta trazada en el paso 3 (utiliza la herramienta Recta Perpendicular).
- 6) Coloca un punto sobre la perpendicular y otro punto sobre la recta del paso 3, los dos puntos aparecerán de color azul claro, se llamarán C y D respectivamente, muévelos y responde:

- ¿Qué ocurre con las rectas cuando se mueven dichos puntos?

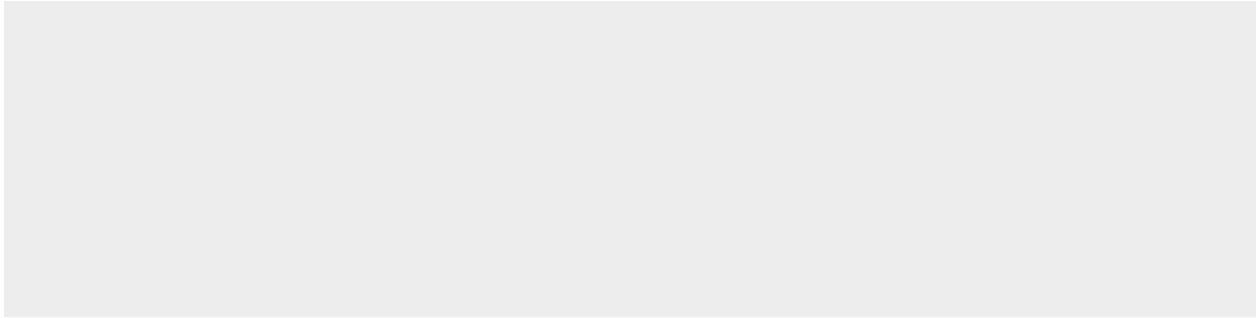


- ¿Pueden dichos puntos *salirse* o *separarse* de las rectas?



- 7) Une los puntos C y D utilizando la herramienta Segmento (se encuentra en el menú desplegable de la herramienta Recta).
- 8) Oculta la recta perpendicular y la recta del paso 3.
- 9) Utilizando la herramienta Segmento, une el punto A con los puntos C y D y responde:

- ¿De qué tipo de triángulo se trata?



- 10) Mueve los 3 puntos cambiándolos de posición, ¿Cambia el tipo de triángulo que se forma?
- 11) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 12) Guarda la construcción con el nombre Practica1b y cierra el programa.

Sección de preguntas de la práctica 1

- En la *práctica 1a*, ¿Qué sucede con la construcción al mover cualquiera de los puntos? ¿Cambia el tipo de triángulo que se forma?
- ¿Qué diferencia existe entre las construcciones de las *prácticas 1a* y *1b* al modificar la posición de los puntos?

- Si estas construcciones se utilizaran para diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de los triángulos (suma de ángulos internos tipos de triángulos según sus lados y ángulos, intersección de bisectrices, mediatrices y alturas), ¿Cuál sería la más conveniente de utilizar y por qué?

- Si estas construcciones se utilizaran para diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de las razones trigonométricas, ¿Cuál sería la más conveniente de utilizar y por qué?

UNIDAD 2

Las Vistas Gráficas de GeoGebra

Las matemáticas escolares son mostradas como un conjunto de reglas a seguir para obtener un resultado determinado, esto ocurre por dos razones importantes, la primera es que la estructura propia de las matemáticas permite trabajar sobre reglas y algoritmos y la segunda es simplemente por tradición (Freudenthal, 1991).

En esta unidad se trabajará principalmente con las Vistas Gráficas, dado que estas permiten visualizar de forma articulada y en tiempo real los cambios que se producen desde las modificaciones de coeficientes, cambios de posición de figuras, tratamientos que se realizan a los distintos objetos en pantalla, etc.

Práctica 2 - Formatos, texto en construcciones y condicionales

La ecuación de la recta puede representarse gráficamente como una línea en un plano, como una expresión algebraica o mediante un enunciado verbal. El uso de herramientas tecnológicas permite que la visualización y el tránsito entre las diferentes representaciones de un objeto matemático se realicen de manera más natural, puesto que pueden observarse al mismo tiempo tanto el comportamiento algebraico como el comportamiento gráfico y la modificación de sus parámetros, tales como la pendiente, la ordenada y la abscisa al origen.

En la presente práctica se desarrolla una actividad mediante la cual se profundiza en el estudio de la línea recta y sus diferentes registros de representación a través de diversas herramientas disponibles en GeoGebra.

Práctica 2a

Instrucciones:

- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra 5.0 y activa la cuadrícula.
- 2) Verifica que esté activada la Vista Algebraica, si no lo está actívala.
- 3) Inserta 2 puntos sobre la Vista Gráfica 1 utilizando la herramienta Punto (sus nombres serán *A* y *B* respectivamente).
- 4) Inserta una recta que pase por ambos puntos utilizando la herramienta Recta.
- 5) En la Vista Algebraica deberán aparecer los objetos insertados en los pasos anteriores, lo que verás en pantalla debe ser parecido a lo que se muestra en la figura 1:

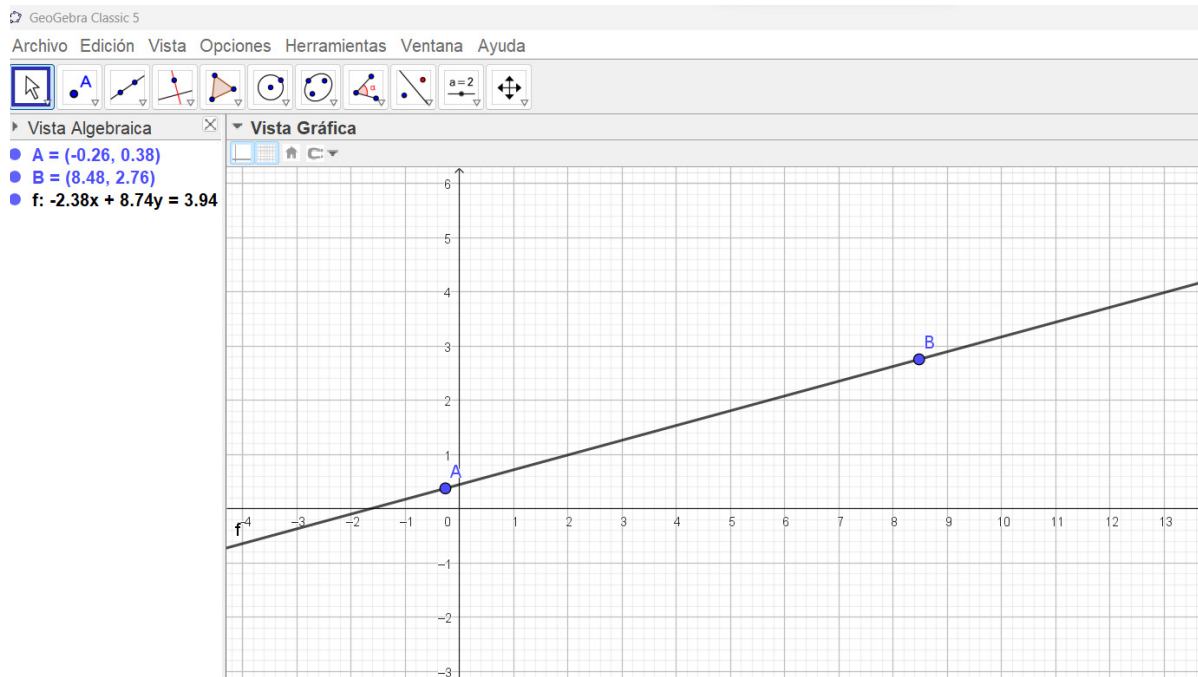


Figura 1. Ejemplo de visualización del paso 5.

- 6) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 7) Sobre la Vista Algebraica, posiciona el puntero del mouse sobre la recta *f*: y da clic derecho sobre ella para visualizar un menú de opciones (A, B y C dependerán de la ubicación de los puntos que hayas insertado).

- 8) Anota las opciones disponibles y qué acción realiza cada una de ellas en la siguiente tabla:

Opción	Acción

Nota: Opciones posibles al dar clic derecho sobre la recta.

- 9) Sobre la Vista Algebraica, posiciona el puntero del mouse sobre cualquiera de los dos puntos y da clic derecho sobre él para visualizar el menú de opciones.
- 10) Anota las opciones disponibles y qué acción realiza cada una de ellas en la siguiente tabla:

Opción	Acción

Nota: Opciones posibles al dar clic derecho sobre un punto.

- 11) Da clic derecho sobre el punto *A* y selecciona la opción *Propiedades del objeto* (*Propiedades* en adelante), se abrirá una ventana emergente como la que se muestra en la figura 2.

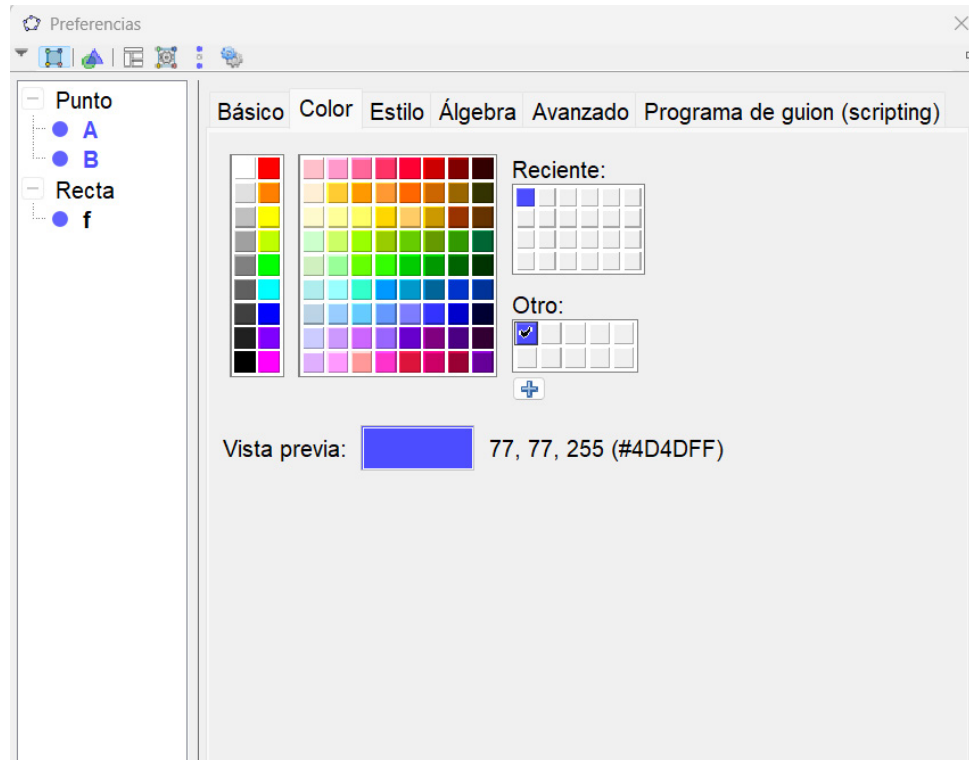


Figura 2. **Menú de Propiedades.**

- 12) La ventana emergente de *Propiedades* aparece con el título *Preferencias* (en el resto de las prácticas se mencionará como *Propiedades*), de manera predeterminada, esta aparecerá en la pestaña *Básico*.
- 13) En la parte izquierda de la ventana de *Propiedades* puede observarse una lista de todos los objetos insertados en la construcción, esto da una ventaja en cuanto a tiempo para realizar cambios, pues al dar clic izquierdo sobre cualquier objeto pueden visualizarse todas las *Propiedades* del objeto sin necesidad de cerrar la ventana o seleccionar el objeto desde la Vista Gráfica 1 o la Vista Algebraica, sin embargo para que cualquier cambio surta efecto de manera inmediata, es conveniente presionar la tecla Enter en el teclado de la computadora después de modificarla, la ubicación de la lista se muestra identificada en la figura 3.

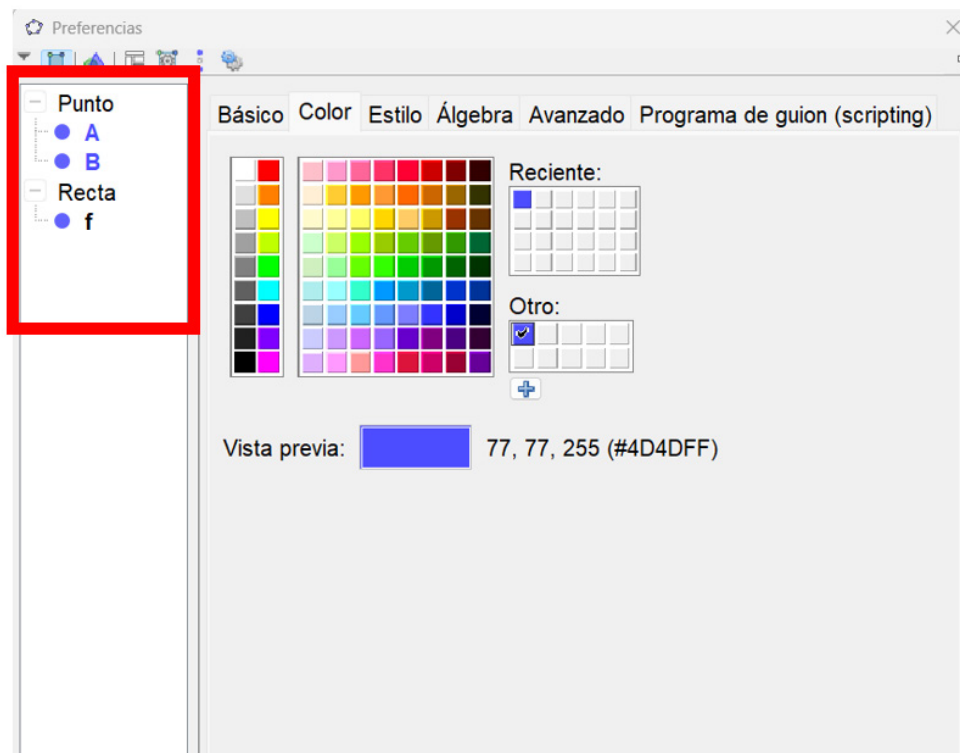


Figura 3. Ubicación de la lista de objetos en el menú de *Propiedades*.

- 14) Cambia el nombre al punto *A* por *Fijo* y activa su opción Objeto fijo en la pestaña *Básico*.
- 15) En la pestaña *Color*, cambia el color por el de tu preferencia.
- 16) En la pestaña *Estilo*, cambia su tamaño y estilo, selecciona el de tu preferencia.
- 17) Selecciona el punto *B*, da clic en la pestaña *Básico* y cambia su nombre por *Móvil*.
- 18) Selecciona la Recta *f* y cambia su nombre por *Recta_{1}*.
- 19) En la pestaña *Básico* enseguida de la opción Etiqueta visible se encuentra un menú desplegable, da clic sobre él y selecciona la opción Valor.
- 20) Cambia el *Color* y el *Estilo* de la recta en las pestañas correspondientes por el de tu preferencia.
- 21) Cierra la ventana de *Propiedades* y observa la Vista Gráfica 1 ¿Qué cambios observas con respecto a los objetos originales?

22) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

23) Haz clic izquierdo y mantenlo presionado sobre el punto *Fijo* y arrastra el mouse hacia arriba y hacia abajo.

- ¿Cómo se modifica la posición del punto con estos movimientos?

24) Repite el paso anterior pero ahora con el punto llamado *Móvil*.

- ¿Cómo se modifica la posición del punto con estos movimientos?

- ¿Qué cambios observas en la *Recta_{1}* en la Vista Gráfica?

- ¿Qué cambios observas en la Vista Algebraica?

25) Da clic derecho sobre la *Recta_{1}* en la Vista Gráfica 1 o en la Vista Algebraica y cambia su modo de visualización de Ecuación a .

26) En el submenú de la herramienta Ángulo, selecciona la herramienta Pendiente.

27) Con la herramienta Pendiente seleccionada, da clic sobre la *Recta_{1}*.

28) Describe lo que aparece en la Vista Gráfica y la Vista Algebraica en la tabla siguiente:

Vista Gráfica	Vista Algebraica

Nota: ¿Qué Objeto nuevo aparece?

29) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

30) Guarda la construcción como Practica2a y abre una nueva ventana de GeoGebra.

Práctica 2b

Instrucciones:

- 1) Verifica que la cuadrícula y Vista Algebraica se encuentren activas, si no lo están actívalas.
- 2) Utiliza la herramienta Punto e inserta 4 puntos en la Vista Gráfica 1 en cualquier posición, sigue el procedimiento descrito en la *práctica 2a* para cambiarles el nombre por P_1 , P_2 , P_3 y P_4 , el color (P_1 y P_2 verdes y P_3 y P_4 rojos) y su tamaño a 6.
- 3) Utiliza la herramienta Recta y une con ella los puntos P_1 con P_2 , cambia su nombre a *Recta_1*, su color a verde, su grosor a 8 puntos y su visualización a la forma .
- 4) Utiliza la herramienta Recta y une con ella los puntos P_3 con P_4 , cambia su nombre a *Recta_2*, su color a rojo, su grosor a 8 puntos y su visualización a la forma .

- 5) Utilizando la herramienta Inserta Texto (Texto para abreviarla), se abrirá una ventana emergente con un editor de texto, la ventana emergente se muestra en la figura 4.

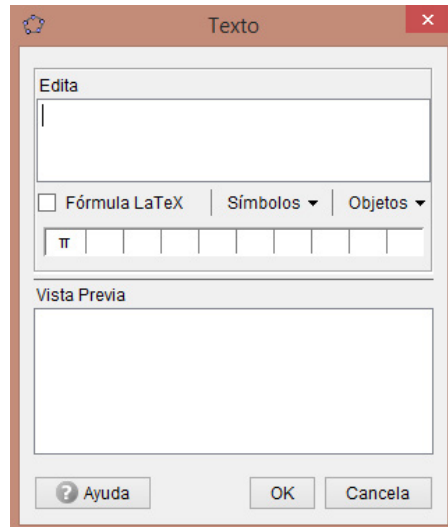


Figura 4. Ventana emergente de edición de texto.

- 6) En el editor de texto de la ventana emergente escribe lo siguiente: Tipos de sistemas de ecuaciones, una vez escrito da clic en el botón Ok.
- 7) Observa la Vista Gráfica y describe lo que aparece en ella en el siguiente cuadro.
- 8) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 9) Utilizando la herramienta Elige y Mueve, da clic izquierdo una vez sobre el texto para seleccionarlo, posteriormente da doble clic izquierdo sobre él y describe lo que sucede en el siguiente cuadro.

Los siguientes pasos describen como crear un texto dinámico:

- 10) Inserta un nuevo texto y escribe lo siguiente: "La recta 1 es $\square$ ", el $\square$ es un Objeto previamente declarado en GeoGebra, para insertarlo, haz clic en la pestaña de Objetos, busca y selecciona al objeto *Recta_1*, este aparecerá dentro de un cuadro; da clic en Ok para que los cambios surtan efecto; la pestaña de Objetos se encuentra en la misma ventana emergente de texto en la ubicación marcada en la figura 5.

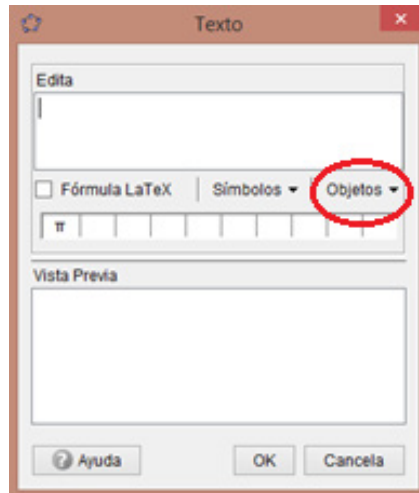


Figura 5. Ventana emergente de edición de texto con la pestaña de objetos remarcada.

- 11) Crea un nuevo texto y escribe lo siguiente: "La recta 2 es $\square$ ", realiza el mismo procedimiento, pero selecciona ahora el objeto *Recta_2*.
- 12) Una vez creados ambos textos, elige uno de los cuatro puntos y cambia su ubicación, describe lo que observas en los textos de la Vista Gráfica 1 en el siguiente cuadro.

- 13) Selecciona la herramienta Intersección que se encuentra en el submenú de la herramienta Punto, utilízala para encontrar la intersección de las rectas *Recta_1* y *Recta_2* (da clic sobre la *Recta_1* y posteriormente sobre la *Recta_2*), aparecerá un punto en color negro llamado A en la de intersección de ambas rectas.

Nota: Si no puedes visualizar las rectas u objetos, utiliza las herramientas Acerca y Aleja o el Scroll de mouse hasta poder visualizarlos, o bien, cambia la ubicación de los 4 puntos para poder visualizar la intersección.

- 14) Selecciona el punto de intersección y usando el menú de *Propiedades*, cambia su nombre por $P_{\{\text{unto de intersección}\}}$, modifica su Etiqueta usando el menú desplegable por Nombre y Valor.
- 15) Cambia el tamaño de $P_{\{\text{unto de intersección}\}}$ por 5 y su color a azul.
- 16) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 17) Inserta un nuevo texto y escribe en el "La solución del sistema de ecuaciones es $x=\square$ y $y=\square$ " los cuadros son *Casillas vacías*, que puedes seleccionar de la pestaña de Objetos (es el primero de ellos).
- 18) En la *Casilla vacía* enseguida de $x=$, escribe $x(P_{\{\text{unto de intersección}\}})$ y en la *Casilla vacía* de $y=$, escribe $y(P_{\{\text{unto de intersección}\}})$, da clic en Ok.
- 19) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 20) Mueve alguno de los puntos (P_1 a P_4) y escribe lo que observas en la Vista Gráfica 1 en el siguiente cuadro.
- 21) Utiliza la herramienta Pendiente y da clic sobre las Rectas $Recta_1$ y $Recta_2$.
- 22) Cambia el nombre de la pendiente de la $Recta_1$ por m_1 y el de la $Recta_2$ por m_2 , posteriormente oculta ambas pendientes.
- 23) Inserta un nuevo texto y escribe en él "Sistema consistente".

24) Inserta un nuevo texto y escribe en él "Sistema inconsistente".

25) Inserta un nuevo texto y escribe en él "Sistema dependiente".

26) Da clic derecho sobre el texto que dice "Sistema consistente" y anota las opciones disponibles y qué acción realiza cada una de ellas en la siguiente tabla.

Opción	Acción

Nota: Opciones posibles al dar clic derecho sobre un texto.

27) Da clic en la opción de Propiedades y después en la pestaña *Avanzado*, en Condición para Exponer el Objeto escribe $m_1 \neq m_2$, una vez realizado, presiona la tecla Enter.

28) Selecciona ahora el texto que dice "Sistema inconsistente" y en la pestaña *Avanzado*, en Condición para Exponer el Objeto escribe $m_1 = m_2$ y presiona la tecla Enter.

29) Selecciona ahora el texto que dice "Sistema dependiente" y en la pestaña *Avanzado*, en Condición para Exponer el Objeto escribe $Recta_1 = Recta_2$ y presiona la tecla Enter.

30) Cierra la ventana de *Propiedades* y observa la Vista Gráfica 1.

31) Mueve los puntos que forman las rectas de tal manera se cumplan las condiciones anteriormente mencionadas y describe tus observaciones en el siguiente cuadro.

32) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

33) Guarda la construcción como Practica2b y cierra el programa.

Sección de preguntas de la práctica 2

- La herramienta Intersección no es la única forma de encontrar o insertar intersecciones, ¿Qué otra forma de hacerlo se te ocurre? (prueba con alguna otra herramienta que hayas utilizado previamente).
- Al dar clic derecho sobre una recta y seleccionar *Propiedades*, en la pestaña *Estilo* además de Grosor y Estilo del trazo aparece la opción Opacidad, ¿Qué efecto tiene ésta opción sobre la recta?
- ¿Cómo utilizarías este tipo de construcciones en tu práctica docente, en el tema de ecuaciones lineales?
- ¿Qué modificaciones realizarías a la construcción para poder utilizarla en tu práctica docente?

- ¿Qué actividades extras deberían agregarse para adaptarlo al nivel educativo donde laboras?

Práctica 3 – Comandos de GeoGebra en Vista Gráfica y construcciones con base en Secuencias

La forma como se realizan construcciones en GeoGebra permite tener una alta precisión, sin embargo, esta se encuentra limitada al pulso de la persona y la resolución de las herramientas de hardware que se estén utilizando.

Sin embargo, si se requieren construcciones con alta exactitud al declarar objetos, tales como intersecciones, números, puntos con coordenadas específicas u objetos que vayan a aparecer de forma secuencial, existe la posibilidad de declararlos mediante el uso de comandos que se forman por una cierta sintaxis y pueden ser utilizados de forma combinada con las herramientas de las diferentes vistas. En esta práctica se explora el uso de comandos de la Barra de Entrada de GeoGebra y algunos ejemplos de construcciones con base en comando secuenciales.

Si bien, existen comandos que generan de forma automática algunas de las secuencias que aquí se describen, el objetivo de esta práctica es guiar hacia el entendimiento de la sintaxis propia del programa.

Práctica 3a

Instrucciones:

- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra clásico y activa la cuadrícula.
- 2) Utilizando la herramienta Punto, ubica en el plano un punto con coordenadas lo más cercanas posible a $(0.34752, 1.435)$, su nombre aparecerá como *A*.
- 3) Modifica las *Propiedades* del punto *A*, en *Básico* activa la casilla de Objeto Fijo, en *Color* a rojo y en *Estilo* por una cruz.
- 4) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

GeoGebra de manera predeterminada utiliza 2 puntos decimales de precisión, por lo que

ubicar el punto anterior sería relativamente complicado, pues las coordenadas del mismo se redondearían, para mayor precisión en las construcciones es posible cambiar el número de decimales después del punto.

- 5) Ubica el menú *Opciones* en la parte superior de la ventana de GeoGebra, haz clic sobre él y en la siguiente tabla anota las diferentes opciones que ofrece el menú, así como su acción sobre el programa.

Opción	Acción

Nota: Opciones y acciones del menú Opciones.

- 6) Selecciona la opción Redondeo y cambia la configuración a 5 lugares decimales, en la opción Tamaño de Letra, cambia el tamaño de la misma a 18 pt.
- 7) Utilizando la herramienta Punto, ubica en el plano otro punto con coordenadas lo más cercanas posible a (0.34752, 1.435), el nombre de este nuevo punto será *B*.
- 8) Cambia las *Propiedades* del punto *B*, en *Básico* activa la casilla de Objeto Fijo, en *Color* a verde y en *Estilo* por un triángulo.
- ¿Resulta más sencillo o más complicado ubicar el punto de ésta forma?

- 9) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

- 10) Ubica la Barra de Entrada, se encuentra en la parte inferior de la Vista Gráfica, tal como se muestra en la figura 1:

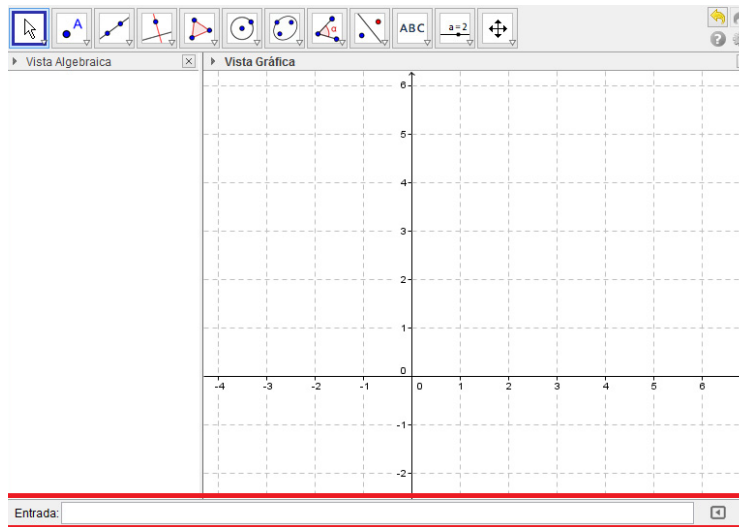


Figura 1. Ubicación de la Barra de Entrada en GeoGebra.

- 11) En dicha barra escribe lo siguiente: (0.34752, 1.435), el nombre de este nuevo punto será *C*, describe lo que sucede en el siguiente cuadro:

Nota: Para insertar un punto utilizando la Barra de Entrada, se utiliza un comando, cuya sintaxis es (<Coordenada en x>,<Coordenada en y>), también puede declararse como "Nombre_{delpunto}=(<Coordenada en x>,<Coordenada en y>)"

- 12) En la Vista Algebraica ubica los 3 puntos que se han insertado hasta el momento.

- ¿Qué diferencia existe entre ellos y cómo es más preciso ubicar un punto con coordenadas específicas?

- 13) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 14) Inserta un nuevo punto con coordenadas (1.234, 4.321) utilizando la Barra de Entrada.
- 15) Escribe lo siguiente en la Barra de Entrada: Recta(C,D), describe lo que sucede en el siguiente cuadro.

Nota: El comando utilizado en este punto tiene la sintaxis Recta(<Punto>, <Punto>).

- 16) Escribe lo siguiente en la barra de entrada: Perpendicular(D,f), describe lo que sucede en el siguiente cuadro.

Nota: El comando utilizado en este punto tiene la sintaxis Perpendicular(<Punto>, <Recta>).

- 17) Escribe lo siguiente en la Barra de Entrada: Ángulo(f,g), posteriormente escribe Ángulo(b,a), describe la diferencia entre ambas en el siguiente cuadro.

Nota: El comando utilizado tiene como sintaxis $\text{Ángulo}(\langle \text{Lado (recta, semirrecta o segmento)} \rangle, \langle \text{Lado (recta, semirrecta o segmento)} \rangle)$, medido tomando como referencia a la primer recta y llegando hasta la segunda recta en sentido antihorario, el comando no funciona si se escribe *Angulo* sin acento.

18) Escribe lo siguiente en la Barra de Entrada: $\text{Pendiente}(f)$, describe lo que sucede en el siguiente cuadro.

Nota: El comando utilizado en este paso tiene la sintaxis $\text{Pendiente}(\langle \text{Recta, semirrecta o segmento} \rangle)$.

19) Escribe lo siguiente en la barra de entrada: $\text{Texto}(a,B)$, describe lo que sucede en el siguiente cuadro.

Nota: El comando que se utilizó para este paso tiene por sintaxis $\text{Texto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Punto} \rangle)$, el Objeto es lo que aparecerá como texto y el Punto es la ubicación de la esquina inferior izquierda del cuadro de texto.

20) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

21) Guarda la construcción como Practica3a y abre un nuevo documento de GeoGebra.

Práctica 3b

Instrucciones:

- 1) En el nuevo documento de GeoGebra, configura la cuadrícula, el tamaño de letra y el redondeo a tu preferencia.
- 2) Escribe los siguientes comandos en la barra de entrada, uno por uno:

$f(x)=x$

$a=0$

$b=4$

$\text{Si}(a \leq x \leq b, f)$

Nota:

El comando $f(x)=x$ crea una función llamada $f(x)$, que al mismo tiempo se visualiza como una línea recta en la Vista Gráfica 1.

Los comandos $a=0$ y $b=4$ crean 2 números llamados a y b con valores 0 y 4 respectivamente.

El comando $\text{Si}(\langle \text{Condición} \rangle, \langle \text{Entonces} \rangle)$, es un condicional para definir el rango donde será visible un objeto, como en este caso el objeto es una función, el resultado será una nueva función llamada $g(x)$, actualmente este comando está en desuso y se ha ido reemplazando por el comando "Función($\langle \text{Expresión} \rangle$, $\langle \text{Parámetro 1} \rangle$, $\langle \text{Valor inicial} \rangle$, $\langle \text{Valor final} \rangle$, $\langle \text{Parámetro 2} \rangle$, $\langle \text{Valor inicial} \rangle$, $\langle \text{Valor final} \rangle$)".

- 3) Oculta el Objeto $f(x)=x$, y da clic derecho sobre $g(x)$, cambia su color al de tu preferencia, su grosor a 5 y oculta su etiqueta.
- 4) En el submenú de la herramienta Deslizador, selecciona la herramienta Casilla de Entrada.
- 5) Da clic izquierdo sobre cualquier lugar de la Vista Gráfica, aparecerá una ventana emergente como se muestra en la figura 2, también puede aparecer como la figura 3:

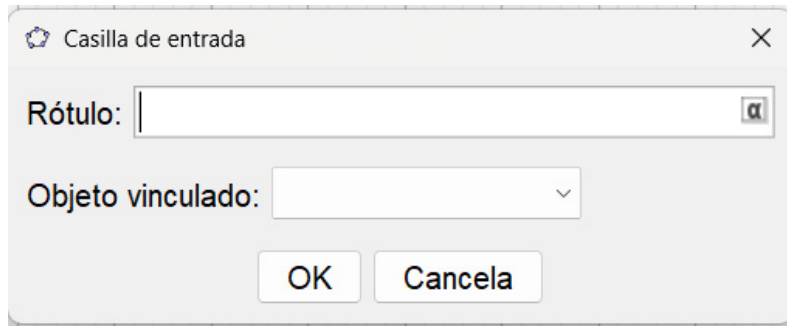


Figura 2. Ventana emergente de Casilla de Entrada.

- 6) En Título, escribe Función $f(x)=$, en Objeto vinculado busca y elige el Objeto $f(x)=x$, una vez realizado lo anterior, da clic en Ok.
- 7) Describe lo que sucede en la Vista Gráfica 1 en el siguiente cuadro:
- 8) Inserta una nueva Casilla de Entrada, pero en Título escribe Límite Inf= y elige $a=0$ como Objeto vinculado, da clic en Aplica.
- 9) Inserta una nueva Casilla de Entrada, pero en Título escribe Límite Sup= y elige $b=4$ como Objeto vinculado, da clic en Aplica.
- 10) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 11) En la Casilla de Entrada de Función $f(x)=$, escribe en el campo de texto: x^2+1 , describe lo que sucede en la Vista Gráfica 1 en el siguiente cuadro.

- 12) En la Casilla de Entrada Limite Inf=, escribe en el campo de texto: 3.
- 13) En la Casilla de Entrada Limite Sup=, escribe en el campo de texto: 6.
- 14) Describe lo que sucedió en los 2 puntos anteriores en el siguiente cuadro.
- 15) En la herramienta Casilla de Entrada, entra al submenú y elige la herramienta Deslizador, da clic sobre cualquier parte de la Vista Gráfica, se abrirá una ventana emergente como se muestra en la figura 3:

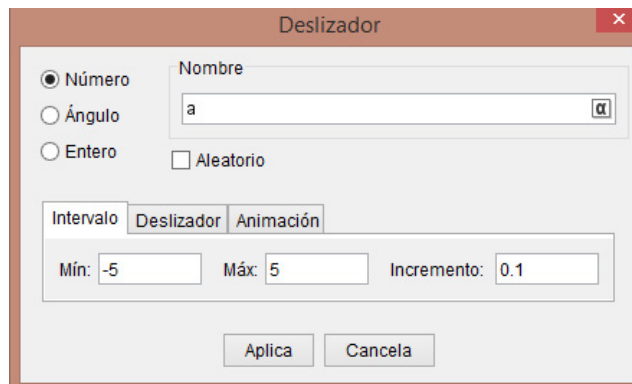


Figura 3. Ventana emergente de la herramienta Deslizador.

- 16) Cambia su nombre por n , en la pestaña Intervalo en Mín escribe 1, en Máx escribe 500 y en Incremento escribe 1; da clic en Aplica y en el siguiente cuadro describe lo que sucede en la ventana de GeoGebra.
- 17) En la Barra de Entrada escribe: $\Delta x = (b-a)/n$, el símbolo Δ lo puedes encontrar haciendo clic en el icono  que se encuentra en el extremo derecho de la Barra de Entrada.

Nota: El icono  sólo aparece al hacer clic sobre la Barra de Entrada.

18) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

Construcción del applet del Método de Euler

Nota: Las siguientes instrucciones van encaminadas a la construcción de una herramienta dinámica que permite encontrar el valor aproximado del área debajo de la función $f(x)$ en el intervalo de a hasta b (*aproximación de la integral definida entre a y b*), dividiendo el intervalo total en subintervalos con incremento de Δx en Δx , formando rectángulos que toman como valor inicial el límite inferior de cada subintervalo, en Cálculo esto es denominado el Método de Euler, éste método tiene un comando directo para hacerlo (SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>), sin embargo el objetivo es el uso de comandos de secuencias para comprender el uso de comandos avanzados.

Primero es necesario construir los rectángulos, para que GeoGebra realice esto utilizaremos el comando denominado Secuencia, el cual tiene la siguiente sintaxis: Secuencia(<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>, <Incremento>)

- Expresión se refiere al tipo de Objeto con el cual se formará la secuencia, que debe contener una variable que no haya sido utilizada previamente ni debe ser una variable reservada para el programa (por ejemplo: e, i, j, x, y o z).
- Variable es aquella literal que se utilizará para asignarle valores a la secuencia.
- Valor inicial es el valor donde iniciará la variable de la secuencia.
- Valor final es el valor donde terminará la variable de la secuencia.
- Incremento indica de cuánto en cuánto irá incrementando la variable declarada en el intervalo.

Por ejemplo: Secuencia(($k,0$), $k,0,10,1$), crearía una secuencia de puntos sobre el eje x con coordenadas ($k,0$), que comenzaría en $k=0$ y terminaría en $k=10$ con incremento de 1 en 1.

El objeto resultante del comando Secuencia es denominado Lista, en el caso del ejemplo mencionado, el resultado sería: $l1=\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(6,0),(7,0),(8,0),(9,0),(10,0)\}$, una lista también puede ser declarada manualmente mediante el comando $=\{""Elemento1", "Elemento2", ..., "ElementoN"\}$ (si los elementos son números, no son necesarias las comillas).

El contenido de una Lista generada en GeoGebra es llamada Elemento, y puede utilizarse como un objeto independiente mediante el comando $\text{Elemento}(l\#, \text{Posición del Elemento en la lista})$, las posiciones son valores numéricos que comienzan en 1 e incrementan de 1 en 1, por ejemplo, si de la $l1=\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(6,0),(7,0),(8,0),(9,0),(10,0)\}$, quisiéramos utilizar el punto con coordenadas (5,0), el comando sería: $\text{Elemento}(l1,6)$, pues se encuentra en la sexta posición en la $l1$.

19) En la Barra de Entrada escribe lo siguiente: $\text{Secuencia}((p, 0), p, a, b, \Delta x)$, en el siguiente cuadro describe lo que se obtendrá al utilizar dicho comando:

20) En la Barra de Entrada escribe lo siguiente: $\text{Secuencia}((s, f(s)), s, a, b, \Delta x)$, en el siguiente cuadro describe lo que se obtendrá al utilizar dicho comando:

21) Mueve el deslizador n hasta el valor de 10, después regrésalo a 1, describe lo que sucede en el siguiente cuadro:

22) En la Barra de Entrada escribe lo siguiente: `Secuencia(Perpendicular(Elemento(l1, r), EjeX), r, 1, n + 1, 1)`, en el siguiente cuadro describe lo que se obtendrá al utilizar dicho comando:

Nota: Escribir EjeX o Ejex es indistinto para el programa.

23) En la Barra de Entrada escribe lo siguiente: `Secuencia(Perpendicular(Elemento(l2, d), EjeY), d, 1, n + 1, 1)`, en el siguiente cuadro describe lo que se obtendrá al utilizar dicho comando:

24) En la Barra de Entrada escribe lo siguiente: `Secuencia(Interseca(Elemento(l3, h + 1), Elemento(l4, h)), h, 1, n, 1)`, en el siguiente cuadro describe lo que se obtendrá al utilizar dicho comando:

25) En la Barra de Entrada escribe lo siguiente: `Secuencia(Polígono(Elemento(l1, k), Elemento(l2, k), Elemento(l5, k), Elemento(l1, k + 1), Elemento(l1, k)), k, 1, n, 1)`, en el siguiente cuadro describe lo que se obtendrá al utilizar dicho comando:

26) En la Barra de Entrada escribe: $\text{Suma}(l_6)$.

- ¿Qué Objeto nuevo aparece en la Vista Algebraica?

27) Inserta un texto dinámico que diga lo siguiente: "El valor aproximado del área bajo la función $\square$ y sobre el eje x desde el $x=\square$ hasta $x=\square$ con incrementos de $\square$, es $\square$ unidades cuadradas", los cuadros en blanco son Objetos que deben insertarse, utiliza el correspondiente de la lista de Objetos en cada uno de ellos y da clic en Ok.

28) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

29) Mueve el Deslizador n hasta el valor de 1, 10, 100, 250 y finalmente a 500, llena la siguiente tabla con lo solicitado:

Valor de n	Objeto	Información solicitada	
1	l_6	¿Número de elementos?	
	$\text{Suma}(l_6)$	¿Valor?	
10	l_6	¿Número de elementos?	
	$\text{Suma}(l_6)$	¿Valor?	
100	l_6	¿Número de elementos?	
	$\text{Suma}(l_6)$	¿Valor?	
250	l_6	¿Número de elementos?	
	$\text{Suma}(l_6)$	¿Valor?	
500	l_6	¿Número de elementos?	
	$\text{Suma}(l_6)$	¿Valor?	

Nota: El número de elementos puedes determinarlo utilizando el comando $\text{NoEle}=\text{Longitud}(l_6)$.

30) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 1 para cada valor de n de la tabla y guarda las imágenes para anexarlas a tu reporte.

31) Guarda la construcción como Practica3b y cierra el programa.

Sección de preguntas de la práctica 3

- En el menú Opciones, ¿Qué diferencia existe en la opción redondeo entre Lugares decimales y Cifras significativas?
- En una sección de la *práctica 3a*, se utilizaron los comandos *Perpendicular(D,a)*, *Ángulo(a,b)* y *Texto(a,B)*. ¿Qué sucede si se escriben de la siguiente forma: *Perpendicular(D,A)*, *Ángulo(A,B)* y *Texto(A,B)*?
- Escribe la Sintaxis del comando Polígono (escríbelo en la Barra de Entrada para ver las distintas opciones).
- ¿Cómo modificarías la construcción del *applet* del Método de Euler para que pueda ser utilizado de manera eficiente en una clase de Cálculo o Métodos numéricos?

- ¿Qué actividades extras deberían agregarse para adaptarlo al nivel educativo donde laboras?

Práctica 4 – La Vista Gráfica 3D

La visualización, siendo una componente importante para el estudio y aprendizaje de las Matemáticas, ha sido un recurso didáctico pobremente aprovechado, principalmente por el predominio de las representaciones algebraicas (Acuña, 2016).

En las asignaturas de Cálculo Vectorial, donde se estudian funciones de varias variables y en sistemas de tres dimensiones, la elaboración de registros gráficos normalmente es poco utilizada, debido en primera instancia a la dificultad que representa realizar un dibujo de 3 dimensiones en un plano de 2 dimensiones (papel o pizarrón), sin embargo, la tecnología computacional permite acceder a este tipo de registros de manera más sencilla, sin descuidar los registros verbales o algebraicos.

Práctica 4a

Instrucciones:

- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra y configura el tamaño de letra y redondeo de decimales según tu preferencia.
- 2) En el menú Vista, oculta la Vista Gráfica 1 y activa la Vista Gráfica 3D.
- 3) Se abrirá una Vista Gráfica como ilustrada en la siguiente figura:

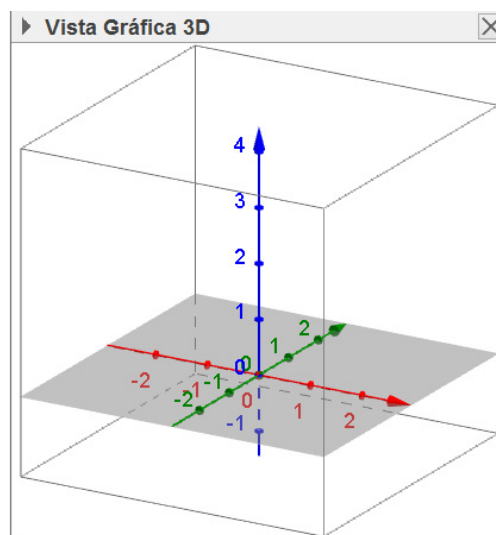


Figura 1. Ventana estándar de la Vista Gráfica 3D.

- 4) Da clic derecho sobre la Vista Gráfica 3D, activa la cuadrícula y oculta el plano.
- 5) En la barra de herramientas de la Vista Gráfica 3D notarás que se encuentran presentes diversas herramientas distintas a las Vistas Graficas 1 y 2, estas herramientas se muestran en la siguiente figura:



Figura 2. Herramientas propias de la Vista Gráfica 3D.

- 6) Utiliza la herramienta Punto para insertar un punto sobre la Vista Gráfica 3D, después inserta otro en una posición distinta, anota las características de ambos puntos insertados en el siguiente cuadro:

- 7) Inserta un nuevo punto utilizando la herramienta, pero después de hacer clic sostenlo y observa que aparece una flecha que apunta en dirección vertical, esta posición es la que permite obtener coordenadas en el , y esta sólo puede modificarse mientras se mantenga sostenido el clic, como se muestra en la siguiente figura:

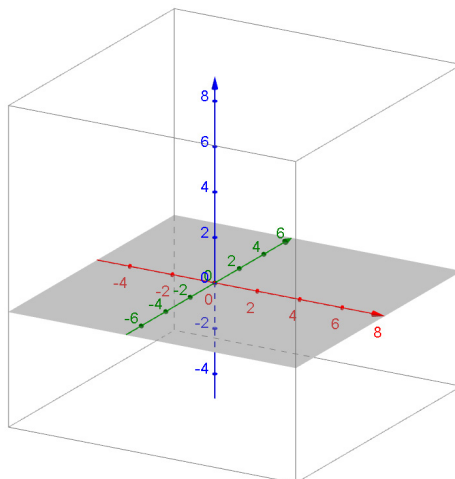


Figura 3. Indicador de posición para el .

- 8) Elimina los 3 puntos insertados y en la barra de entrada escribe lo siguiente: $(1,1,0)$, anota lo que observas en la Vista Gráfica 3D en el siguiente cuadro:
- 9) Escribe en la barra de entrada lo siguiente $(-1,1,1)$ y posteriormente $(1,-1,2)$. ¿Qué diferencia tienen estos tres puntos?, ¿sobre qué eje se realizan los desplazamientos?
- 10) Activa la Vista Gráfica 1 y observa lo que aparece en ella, descríbelo en el siguiente cuadro:
- 11) Oculta la Vista Gráfica 1 y utiliza la herramienta Plano por tres puntos, da clic sobre los 3 puntos en la Vista Gráfica 3D y anota tus observaciones en el siguiente cuadro:
- 12) Utiliza la herramienta Rota la Vista Gráfica 3D, describe en la siguiente tabla cómo gira la Vista Gráfica al mover el mouse en la dirección indicada:

Dirección	Sentido de giro de la Vista Gráfica 3D
Arriba	
Abajo	
Izquierda	
Derecha	

- 13) Utiliza la herramienta Perpendicular, da clic en el plano que generaste en el paso 11 y sobre el punto A, ¿Qué objeto aparece en la Vista Gráfica 3D y cómo está definido dicho objeto (su ecuación)?
- 14) En la barra de entrada escribe , ¿Qué objeto aparece en la Vista Gráfica 3D y cuál es su ecuación?
- 15) En la barra de entrada escribe , ¿Qué objeto aparece en la Vista Gráfica 3D y cuál es su ecuación?
- 16) En la barra de entrada escribe , ¿Qué objeto aparece en la Vista Gráfica 3D y cuál es su ecuación?
- 17) En la barra de entrada escribe , ¿Qué objeto aparece en la Vista Gráfica 3D y cuál es su ecuación?
- 18) Realiza una captura de pantalla de este punto y guárdala en un documento Word para anexarla en tu reporte y guarda la construcción como Practica4a.

Práctica 4b

Instrucciones:

- 1) Abre una nueva ventana de GeoGebra, repitiendo los pasos 1, 2 y 4 de la *práctica 4a*.
- 2) Mediante la barra de entrada inserta los puntos: , , y .

Nota: Quizás será necesario alejar la Vista Gráfica 3D para poder visualizar todos los puntos a la vez, para ello utiliza las herramientas Aproximar o Alejar del Submenú de la herramienta Rota la Vista Gráfica 3D o en su defecto la rueda del mouse.

- 3) Utiliza la herramienta Esfera centro-punto para crear una esfera con los puntos y .
- 4) Utiliza la herramienta Plano por tres puntos para crear un plano con los puntos , y .
- 5) Utiliza la herramienta Intersección de dos superficies y con ella encuentra la intersección entre la esfera y el plano. Realiza una captura de pantalla y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 6) Oculta la esfera y el plano, ¿Qué observas en la Vista Gráfica 3D? ¿Qué objeto apareció en la Vista Algebraica y cuál es su ecuación?, escribe tus observaciones en el siguiente cuadro:

- 7) Oculta la cónica y escribe lo siguiente en la barra de entrada: $f(x,y)=x^2/2+y^2/4$ y $g(x,y)=x^2/2-y^2/4$.
- 8) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 3D y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 9) Guarda la construcción como Practica4b.

Nota: la herramienta Intersección de dos superficies, al momento, no funciona al utilizarse en funciones multivariadas debido a que dicha herramienta no está habilitada para ese tipo de objetos.

Práctica 4c

Instrucciones:

- 1) Abre una nueva ventana de GeoGebra, repitiendo los pasos 1, 2 y 4, pero omitiendo ocultar la Vista Gráfica 1 de la *práctica 4a*.
- 2) En la Vista Gráfica 1, oculta los ejes e inserta con la herramienta Deslizador un número de nombre a en el intervalo de a con incremento de a .
- 3) Oculta los ejes y el plano de la Vista Gráfica 3D.
- 4) Inserta en la barra de entrada los siguientes comandos:

$$A = (0,0,0)$$

$$A + (a, 0, 0)$$

$$A + (0, 0, a)$$

$$A + (0, a, 0)$$

- 5) Escribe lo siguiente en la barra de entrada: `Cubo[A,B,Vector[A,C]]`, éste comando inserta un cubo, cuya arista mide la distancia que hay entre los puntos A y B, y se genera en dirección de un vector que comienza en A y termina en C.
- 6) En la Vista Algebraica, oculta todos los objetos que sean Segmento, realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica 3D y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 7) Oculta todos los objetos habilitados en la Vista Algebraica.
- 8) En la barra de entrada escribe por separado los siguientes comandos:

`Vector[A,B]`, `Vector[A,C]`, `Vector[A,D]` y `Vector[A,A+(a,a,a)]`, en el siguiente cuadro escribe tus observaciones:

- 9) En la Vista Gráfica 1, mueve el deslizador para cambiar su valor, describe lo que ocurre en la Vista Gráfica 3D al incrementar y decrementar el valor de en el siguiente cuadro.

- 10) Realiza una captura de pantalla de la Vista Gráfica y Vista Gráfica 3D y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

- 11) Guarda la construcción como Practica4c

Práctica 4d

Instrucciones:

- 1) Abre una nueva ventana de GeoGebra, repitiendo los pasos 1, 2 y 4 de la *práctica 4a*, pero omitiendo ocultar la Vista Gráfica 1.
- 2) En la Vista Gráfica 1, oculta los ejes e inserta con la herramienta Deslizador un número de nombre a en el intervalo de a con incremento de a .
- 3) Oculta el plano de la Vista Gráfica 3D.
- 4) Escribe el comando $f(x,y)=-x^3+3x^2-y^3+y$
- 5) Escribe el comando $z=a$
- 6) En la Vista Gráfica 3D, localiza y da clic en la herramienta Intersección entre dos superficies, con el icono .
- 7) Con la herramienta Intersección entre dos superficies, da clic sobre la función f y el plano z . Alternativamente, en la barra de entrada escribe el siguiente comando: `IntersecaRecorridos(p, f)`

- 8) Utiliza el siguiente cuadro para anotar lo que observas en la Vista Gráfica 1 y la Vista Gráfica 3D.
- 9) Da clic derecho sobre el nuevo objeto que se generó en la Vista Algebraica y activa la opción rastro.
- 10) Da clic nuevamente sobre este objeto y en la ventana de *Propiedades* da clic en Avanzado, en la sección Ubicación (parte inferior de esta ventana) desactiva la opción Vista Gráfica. Posteriormente cierra la ventana de *Propiedades*.
- 11) Mueve el Deslizador "a" en todo el intervalo, utiliza el siguiente cuadro para anotar lo que observas en la Vista Gráfica 1 y la Vista Gráfica 3D.
- 12) Da clic sobre la Vista Gráfica 3D y selecciona la herramienta Punto , da clic sobre ella y posteriormente da clic sobre la gráfica de la función f. Se generará un punto A que podrá recorrer toda la función.
- 13) Escribe los siguientes comandos en la barra de entrada:

$$g(x,y)=\text{Derivada}(f, x)$$

$$h(x,y)=\text{Derivada}(f, y)$$

$$r=g(x(A),y(A))$$

$$s=h(x(A),y(A))$$

- 14) Utiliza el siguiente cuadro para anotar lo que observas sobre la Vista Gráfica 3D y la Vista Algebraica.
- 15) Utiliza la vista algebraica para ocultar el plano P y las gráficas de las derivadas parciales $g(x,y)$ y $h(x,y)$.
- 16) Sobre la barra de entrada escribe el comando $\text{Vector}((r,s))$.
- 17) Da clic derecho sobre el nuevo objeto que se generó en la Vista Algebraica y activa la opción rastro.
- 18) Da clic nuevamente sobre este objeto y en la ventana de Propiedades del objeto da clic en Avanzado, en la sección Ubicación (parte inferior de esta ventana) desactiva la opción Vista Gráfica. Posteriormente cierra la ventana de Propiedades del objeto.
- 19) Con la herramienta Mueve , selecciona el Punto A en la Vista Gráfica 3D y muévelo, posteriormente anota tus observaciones en el siguiente cuadro.
- 20) Con la herramienta Rota la Vista Gráfica 3D, gira el espacio para visualizar el Plano XY desde arriba.
- 21) Realiza una captura de pantalla de la Vista Algebraica, Vista Gráfica y Vista Gráfica 3D, y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 22) Guarda la construcción como Práctica 4d.

Sección de preguntas de la práctica 4

- En la construcción de la *práctica 4c*, utiliza el comando `Cubo[A,B,Vector[A,B]]`, escribe tus observaciones en el siguiente cuadro.
- En la construcción de la *práctica 4c*, utiliza el comando `Cubo[A,B,Vector[A,D]]`, escribe tus observaciones en el siguiente cuadro.
- ¿Qué representa matemáticamente lo que se realiza en el paso 11 de la *práctica 4d*?
- ¿Qué modificaciones o elementos agregarías a la *práctica 4d* para trazar derivadas direccionales?

UNIDAD 3

La Vista de Cálculo Simbólico

Los Sistemas de Álgebra Computacional (Computer Algebra Systems, CAS por sus siglas en inglés) comenzaron a utilizarse en las décadas de 1950 y 1960, cuando se exploraron métodos para automatizar cálculos simbólicos mediante computadoras. Los primeros desarrollos surgieron con la necesidad de resolver problemas complejos en Física y Matemáticas que requerían manipulación algebraica extensa.

Uno de los sistemas pioneros fue FORMAC (FORMula MANipulation Compiler), desarrollado por Jean Sammet en IBM a principios de los años 60. Este sistema funcionaba como una extensión de FORTRAN y permitía realizar operaciones simbólicas básicas (Sammet, 1966).

Posteriormente, en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (Massachusetts Institute of Technology, MIT por sus siglas en inglés), se desarrolló MACSYMA (Project MAC's SYmbolic MANipulator), uno de los primeros CAS de propósito general y uno de los más influyentes de la historia; su desarrollo comenzó en 1968 y fue financiado por la NASA y otras agencias gubernamentales, MACSYMA introdujo conceptos que influirían en los futuros CAS, como la manipulación simbólica avanzada, la factorización de polinomios, derivadas simbólicas, y transformadas algebraicas (Moses, 2012).

Durante las décadas siguientes, los CAS evolucionaron de sistemas académicos limitados a herramientas comerciales sofisticadas, en los años 1980 y 1990 surgieron programas ampliamente conocidos como Mathematica, desarrollado por Stephen Wolfram en 1988, y Maple, creado por un grupo de investigadores de la Universidad de Waterloo a fines de los años 70 (Geddes, Czapor y Labahn, 1992). Ambos programas llevaron la computación simbólica a un público más amplio, incluyendo ingenieros, matemáticos y científicos aplicados.

Con el tiempo, los CAS comenzaron a incorporarse en entornos educativos, a través de herramientas como Derive, TI-Nspire y más recientemente en plataformas en línea como WolframAlpha. La evolución de los CAS ha sido paralela al desarrollo de la informática,

ampliando las posibilidades del razonamiento matemático asistido por computadora y convirtiéndose en una herramienta esencial en la educación y la investigación moderna. En palabras de Leadbetter y Thomas (1989), los CAS son herramientas que potencialmente proveerán al educador de nuevas y emocionantes maneras de presentar ideas matemáticas.

Práctica 5 – La herramienta CAS (Cálculo Simbólico)

CAS por sus siglas en inglés significa Computer Algebra System, es un programa que facilita el Cálculo Simbólico al trabajar ecuaciones de forma algebraica, utilizando la sintaxis que se maneja normalmente al resolver problemas en papel, además de utilizar lo que se escribe como una ecuación algebraica y darle tratamiento algebraico, en lugar de darle tratamiento numérico como una calculadora tradicional.

Además de esto, GeoGebra permite vincular la Vista de CAS con las Vistas Gráficas, de esta manera es posible visualizar más de un registro de representación a la vez, aprovechando las bondades que permite el programa.

Nota: Las ecuaciones serán escritas en formato ecuación sin la herramienta de matemáticas del procesador de texto, para facilitar la sintaxis que utiliza el CAS.

Práctica 5a

Instrucciones:

- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra, desactiva las Vistas Gráfica y Algebraica y activa la Vista CAS, deberá aparecer una ventana como la que se muestra en la siguiente figura.

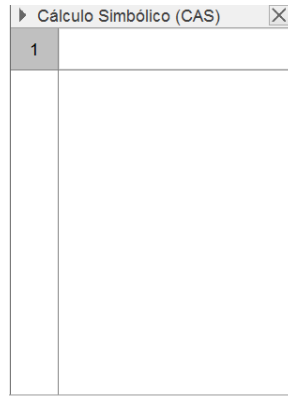


Figura 1. Ventana de Cálculo Simbólico de GeoGebra 5.0.

- 2) El CAS funciona exclusivamente utilizando comandos, cada línea que se utiliza está representada por un número, al comenzar siempre comenzará en 1; da clic sobre la parte en blanco para editarlo, deberá verse como la siguiente figura.

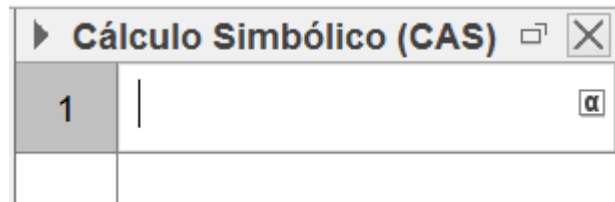


Figura 2. Ventana de Cálculo Simbólico para editar.

- 3) Escribe lo siguiente: $x^3+x^5+x^2$, después presiona la tecla Enter en el teclado, CAS automáticamente generará la segunda línea donde podrá editarse.
- 4) Da clic sobre la parte en blanco de la línea 2 y escribe lo siguiente factoriza, CAS mostrará (al igual que la barra de entrada) la sintaxis del comando y todos los comandos que comienzan con la palabra escrita, esto se muestra en la siguiente figura.

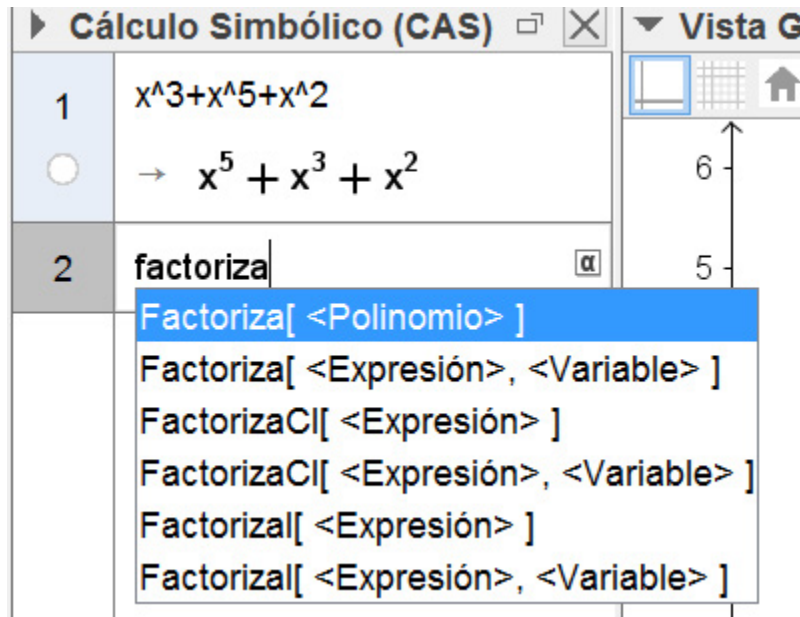


Figura 3. Ventana de Cálculo Simbólico con segundo renglón y lista de comandos.

Da clic sobre el comando Factoriza[<Polinomio>], éste será copiado al renglón 2, como se muestra en la siguiente figura.

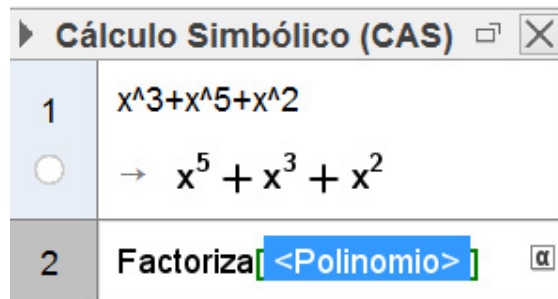


Figura 4. Selección del comando Factoriza[<Polinomio>].

- 5) Como puede observarse, la palabra <Polinomio> se encuentra resaltada de color azul, esto indica que se encuentra seleccionado y permitirá escribir un comando o bien, copiar un comando.
- 6) Posiciona el puntero del mouse sobre la ecuación enseguida de la flecha en el renglón 1, la ecuación se verá resaltada en azul claro como se muestra en la siguiente imagen.

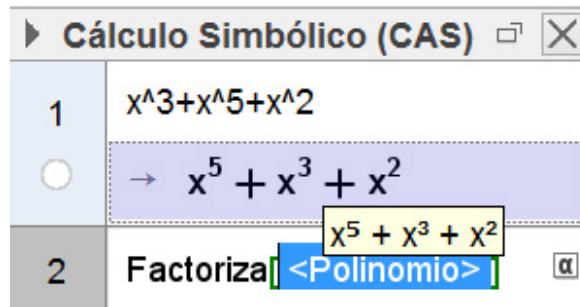


Figura 5. Selección de la ecuación a factorizar.

- 7) Si lo anterior fue realizado correctamente, el resultado será el que se muestra en la siguiente figura.

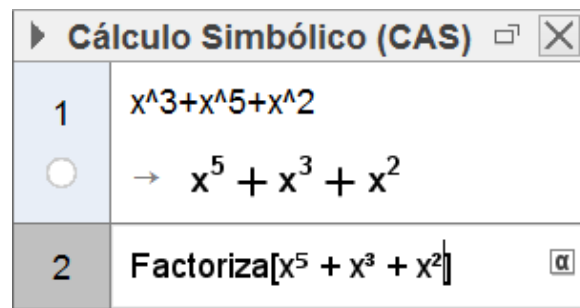


Figura 6. Ecuación dentro del comando.

- 8) Presiona Enter en el teclado, en el resultado se mostrará la factorización del polinomio.
- 9) En el renglón 3 escribe lo siguiente: $ax^2+bx+c=0$ y presiona la tecla Enter,
- 10) En el renglón 4 escribe lo siguiente: $a*x^2+b*x+c=0$.
- 11) En el renglón 5 escribe la palabra resuelve y selecciona el comando Resuelve[<Ecuación>], en expresión escribe o selecciona $ax^2+bx+c=0$.
- 12) Repite el paso anterior, pero ahora escribe o selecciona $a*x^2+b*x+c=0$.
- 13) En el siguiente cuadro responde: ¿Cuál es la diferencia entre las dos expresiones anteriores y por qué no se obtiene el mismo resultado al resolverlas?

14) En los siguientes renglones escribe:

$$x+y=1$$

$$x-y=2$$

15) En el siguiente renglón escribe la palabra resuelve, pero ahora selecciona el comando Resuelve[<Lista de ecuaciones>, <Lista de variables>].

16) La sintaxis para poder utilizar este comando es mediante la creación de listas de elementos, una lista en GeoGebra se crea mediante el uso de llaves { }, en la parte del comando que dice <Lista de ecuaciones> escribe: { $x+y=1$, $x-y=2$ }, en donde dice <Lista de variables> escribe { x , y }; las llaves indican el inicio y el fin de una lista, la separación por comas indica que se trata de elementos distintos.

17) Una vez realizado lo anterior presiona Enter en el teclado para obtener el resultado, este se mostrará como una lista de elementos.

El comando anterior puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones de varias variables de manera rápida, pero además de esto existe un comando que permite realizar despejes de ecuaciones.

18) Escribe la siguiente ecuación en el próximo renglón: $1/(x-6)+x/(x+2)=4/(x^2+8x+12)$, presiona la tecla Enter.

19) Escribe la palabra resuelve y selecciona el comando Resuelve[Ecuación] y escribe o selecciona la ecuación anterior, presiona Enter en el teclado y observa el resultado, realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

20) Escribe la ecuación $\ln((x+y)/x)=4$, presiona Enter.

21) Escribe la palabra resuelve y selecciona el comando Resuelve(<Ecuación>, <Variable>], en la parte de <Ecuación> escribe o selecciona la ecuación anterior y en <Variable> escribe ; realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

22) Escribe la ecuación $(x+1)*(y^2+2)=z^2+1$, presiona Enter.

23) Escribe la palabra resuelve y selecciona el comando Resuelve[<Ecuación>, <Varia-

ble>], en la parte de <Ecuación> escribe o selecciona la ecuación anterior y en <Variable> escribe ; realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

24) Guarda la construcción como Practica5a.

Práctica 5b

Además de realizar despejes, el CAS permite asignar valores a las variables.

Instrucciones:

- 1) Escribe la ecuación $y=5x+6$, después presiona la tecla Enter.
- 2) Escribe la palabra sustituye y selecciona el comando Sustituye[<Expresión>, <Lista de reemplazos>], en <Expresión> selecciona o escribe la ecuación anterior y en <Lista de reemplazos>, escribe $x=3$, presiona Enter.
- 3) Repite el paso anterior, pero en <Lista de reemplazos>, escribe $y=3$, posteriormente despeja x de la ecuación utilizando el comando correspondiente, realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 4) Guarda la construcción como Practica6b.

Práctica 5c

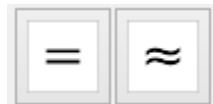
El CAS también dispone de comandos y herramientas para resolver ejercicios relacionados con Cálculo Diferencial, Integral y Ecuaciones diferenciales.

Instrucciones:

- 1) Escribe la función $f(x)=5x^3\cdot\text{sen}(x)$
- 2) Escribe la palabra derivada y selecciona el comando Derivada[<Expresión>], posteriormente selecciona o escribe la función anterior y presiona la tecla Enter.
- 3) Escribe nuevamente la palabra derivada, pero selecciona el comando Derivada[<Expresión>, <Variable>, <Número (orden de la derivada)>], en <Expresión>, escribe la

función del paso 1, en <Variable> escribe x , y en <Número (orden de la derivada)>, escribe 2 y presiona Enter, esto permite encontrar la segunda derivada de la función.

- 4) Escribe la función $f(x,y)=\ln((x+y)/x)$, presiona Enter.
- 5) Utiliza el comando Derivada[<Expresión>, <Variable>], para encontrar la derivada parcial de la función anterior con respecto a x .
- 6) Escribe la ecuación $x \cdot e^{(x^2)}$ [Nota, para que el programa detecte que se está utilizando el número e , es necesario presionar la tecla Alt al mismo tiempo que la tecla e (Alt+e), la letra e aparecerá en cursivas].
- 7) Escribe la palabra integral y selecciona el comando Integral[<Función>, <Variable>], selecciona la función anterior y utiliza la Variable x .
- 8) Escribe la palabra integral, pero selecciona el comando Integral[<Función>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>], escribe la función del paso 6, utiliza la Variable x y los valores inicial y final como 0 y 4 respectivamente, finalmente presiona Enter.
- 9) El resultado que se obtiene es el valor exacto, debido a que de forma predeterminada se tiene seleccionada la herramienta Evalúa (Evaluación exacta), para encontrar el valor numérico se debe utilizar la herramienta Valor numérico (Aproximación numérica), selecciona dicha herramienta y repite el paso 37. Posteriormente vuelve a seleccionar la herramienta Evalúa (Evaluación exacta), los iconos de dichas herramientas son:



- 10) Escribe la ecuación $y' = -3x \cdot y^2$ y presiona la tecla Enter.
- 11) Escribe el comando ResuelveEDO[<Ecuación>] y utilízalo para resolver la ecuación anterior. Éste comando proporciona la solución de la ecuación diferencial, en este caso por medio de separación de variables.
- 12) Realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 13) Guarda la construcción como Practica5c.

Práctica 5d

Finalmente, existe un comando que permite desarrollar productos o expresiones elevadas a potencias, pero primero es necesario seleccionar la herramienta Conserva la entrada, si no se selecciona, el programa desarrollará automáticamente los productos, el icono es el siguiente:



Instrucciones:

- 1) Activa la Vista Gráfica.
- 2) Escribe la expresión algebraica $(x+3)^2$ y presiona Enter.
- 3) Escribe la palabra desarrolla, elige el comando Desarrolla[<Expresión>] y selecciona la expresión anterior.
- 4) En el lado izquierdo de éste último renglón y debajo del número de renglón se puede observar un círculo en color blanco, da clic sobre él y observa lo que ocurre en la Vista Gráfica, realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 5) Guarda la construcción como Practica5d.

Sección de preguntas de la práctica 5

- ¿Cuáles son los comandos correspondientes para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales de ?

$$x+y+z=1$$

$$3x-2y+5z=-2$$

$$4x+4y-z=5$$

- Las expresiones obtenidas con comandos para derivadas también pueden ser utilizadas para encontrar valores específicos utilizando el comando Sustituir(<Expresión>, <Lista de reemplazos>), utilízalo para encontrar la derivada específica de $f'(3)$, si $f(x) = 5\cos(4x)/(x^2+1)$, posteriormente encuentra el valor numérico haciendo clic sobre la herramienta:



- Escribe la sintaxis para el comando o los comandos que permiten encontrar el resultado de la integral entre dos funciones.

- Resuelve la ecuación diferencial $y' = y/x$.

- ¿Cómo utilizarías estas herramientas en tu práctica docente?

- ¿Cuál sería el mayor inconveniente de utilizar las herramientas del cálculo simbólico y que actividades extras deberían agregarse para adaptarlo al nivel educativo donde laboras?
- Para más información y ejemplos de herramientas útiles, pueden consultarse las siguientes páginas:

https://wiki.geogebra.org/es/Operadores_y_Funciones_Predefinidas

http://wiki.geogebra.org/es/Vista_CAS

UNIDAD 4

La Vista de Hoja de Cálculo, su vinculación con las Vistas Gráficas y la Calculadora de Probabilidad

Según la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval (1995, 2006), un objeto matemático no es perceptible a los sentidos de manera directa, sin embargo, sus representaciones si lo son, por ejemplo: ecuaciones, gráficas, textos, etc. De esta forma, un registro de representación debe dar la información necesaria para interpretar, tratar o convertirlo en otro.

La articulación de registros de representación semiótica es un proceso clave en la comprensión matemática, que implica coordinar diferentes formas de representar un mismo objeto matemático (Duval, 1993). Estos registros pueden ser gráficos, algebraicos, verbales, tabulares, entre otros, y su manejo adecuado es esencial para desarrollar una comprensión profunda. La conversión entre registros no es automática ni trivial: implica un cambio en el tratamiento cognitivo y suele ser fuente de dificultad para los estudiantes (Duval, 2006). Así mismo, sostiene que la competencia matemática no solo depende de operar dentro de un registro, sino especialmente de poder articularlos, es decir, traducir

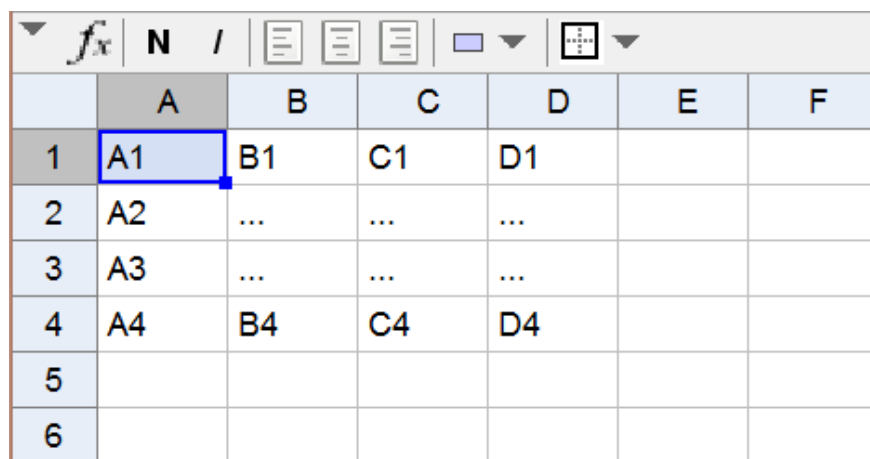
de uno a otro manteniendo la invariancia del significado matemático. Esta articulación permite una mayor flexibilidad cognitiva y es indicativa de comprensión conceptual.

En investigaciones recientes, se ha mostrado que los estudiantes que dominan esta articulación tienden a tener mejor desempeño en resolución de problemas y razonamiento matemático (Godino et al., 2007), por lo cual promover estas habilidades es una tarea importante dentro del proceder del docente y el enfoque de Duval al dirigir la atención hacia los procesos de representación y conversión, y no solo hacia los procedimientos algorítmicos tradicionales abona en ello.

Práctica 6 – Vinculando la Vista Gráfica y la Hoja de Cálculo, análisis estadístico de datos en Hoja de Cálculo

GeoGebra permite, entre otras cosas utilizar o crear tablas de valores para obtener modelos matemáticos, y vincularlos de manera directa con la Vista Gráfica o utilizar objetos de la Vista Gráfica y transportarlos a una tabla de valores.

La Hoja de Cálculo de GeoGebra es parecida a la interfaz de programa de Office MS Excel, donde las columnas (celdas acomodadas de forma vertical) se nombran con las letras del abecedario y las filas (celdas acomodadas de forma horizontal) se nombran con números, y se escriben con la sintaxis Columna/Fila, por ejemplo: la primer celda en la columna A y la fila 1 será la celda A1, la consecutiva pero en la siguiente columna será B1, C1, D1 y así sucesivamente, mientras que la consecutiva a A1, pero en el siguiente renglón será A2, A3, A4 y así sucesivamente, esto se ilustra en la figura 1.



	A	B	C	D	E	F
1	A1	B1	C1	D1		
2	A2	...	...	...		
3	A3	...	...	...		
4	A4	B4	C4	D4		
5						
6						

Figura 1. La Vista de Hoja de Cálculo de GeoGebra.

Así, en esta práctica practicarás el uso de las herramientas básicas de la Vista de Hoja de Cálculo, vincularlas con la Vista Gráfica 1 y observar sus cambios simultáneos en la Vista Algebraica, así como utilizar las herramientas de Análisis Estadístico propias de esta Vista de GeoGebra.

Práctica 6a

Instrucciones:

- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra 5.0.
- 2) Configura el tamaño de letra y redondeo de decimales según tu preferencia (de manera predeterminada el programa redondea a 2 decimales), activa la cuadrícula si lo deseas.
- 3) Ubica el menú Vista en la parte superior de la ventana de GeoGebra, en este menú activa la Vista de Hoja de Cálculo, la pantalla de GeoGebra deberá visualizarse como en la figura 2.

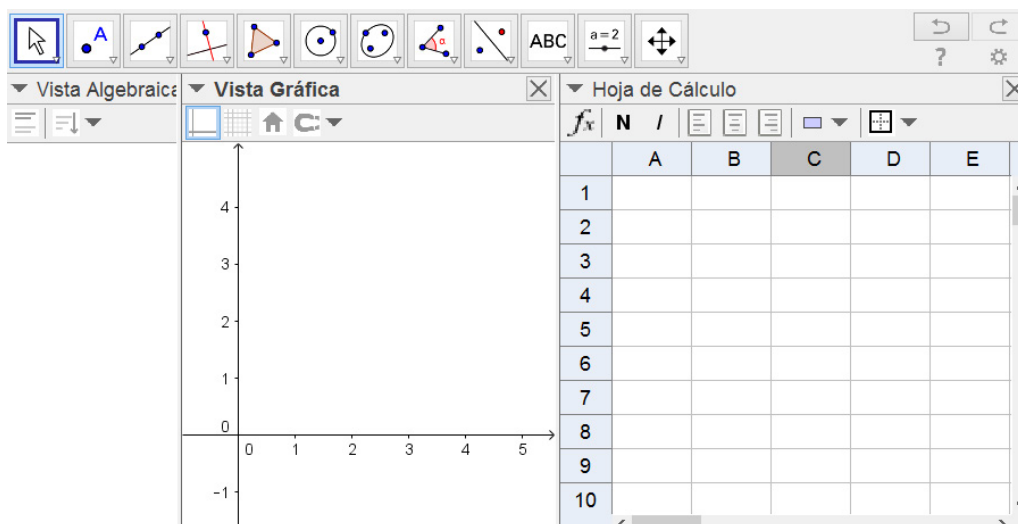


Figura 2. La ventana de GeoGebra con 3 vistas activas.

- 4) En la barra de entrada y escribe: x ; aparecerá una línea recta en la Vista Gráfica 1 y un objeto en la Vista Algebraica llamado .
- 5) Cambia color y grosor a la función según tu preferencia, no cambies su nombre.
- 6) Da doble clic sobre la celda A1 en la Hoja de Cálculo y escribe x , presiona la tecla Enter en el teclado; describe lo que observas en la Vista Gráfica 1 y en la Hoja de Cálculo en el siguiente cuadro.
- 7) Borra el contenido de la celda A1 y escribe en su lugar " x "; describe lo que observas en la Vista Gráfica 1 y en la Hoja de Cálculo en el siguiente cuadro.

Nota: Es necesario escribir " x " incluyendo las comillas.

- 8) En la celda B1 escribe " $f(x)$ ".
- 9) Activa la visualización de funciones " fx " que se encuentra en la esquina superior izquierda de la Hoja de Cálculo, el icono es el siguiente , su ubicación se muestra en la figura 3.

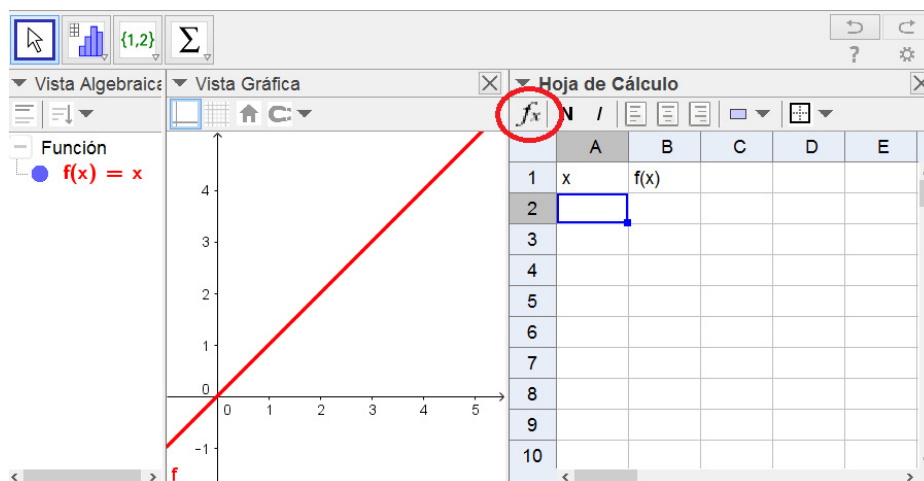


Figura 3. La ventana de GeoGebra con 3 vistas activas.

- 10) En la celda D1 escribe "Incremento", para visualizar el texto completo en la celda, da clic sobre la línea marcada en la figura 4, sostén el clic y arrastra hacia la derecha hasta que se visualice por completo.

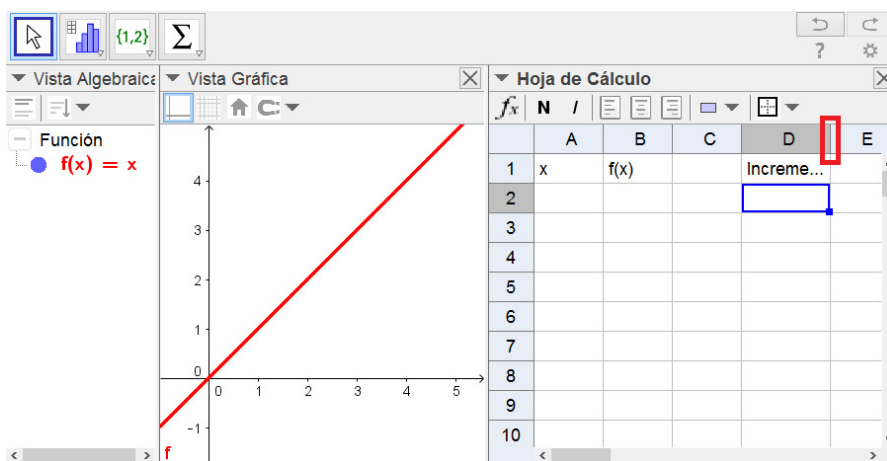


Figura 4. Arrastrar para modificar las dimensiones de la celda.

Nota: Haciendo doble clic sobre dicha línea también se puede modificar el tamaño, de esta forma GeoGebra acomoda la dimensión de la celda al tamaño exacto del texto contenido en ella.

- 11) Realiza los siguientes pasos en la Vista de Hoja de Cálculo:

- En la celda D2 escribe 0.5, después presiona la tecla Enter.
- En la celda A2 escribe 0, después presiona la tecla Enter.
- En la celda A3 escribe $=A2+D\$2$.
- Arrastra la esquina inferior derecha de la celda A3 (aparece un cuadro azul) y suéltala en la celda A12, aparecerán entonces los números desde el 0 hasta el 5 con incremento de 0.5 en 0.5 en las celdas subsecuentes.
- En la celda B2 escribe: $=f(A2)$.
- Arrastra la esquina inferior derecha de la celda B2 (aparece un cuadro azul) y suéltala en la celda B12, aparecerá la evaluación para la función .

Nota: Los pasos descritos anteriormente crean una tabla de valores en la Vista de Hoja de Cálculo para la función en el intervalo de con incremento de 0.5, lo anterior se ilustra en la figura 5.

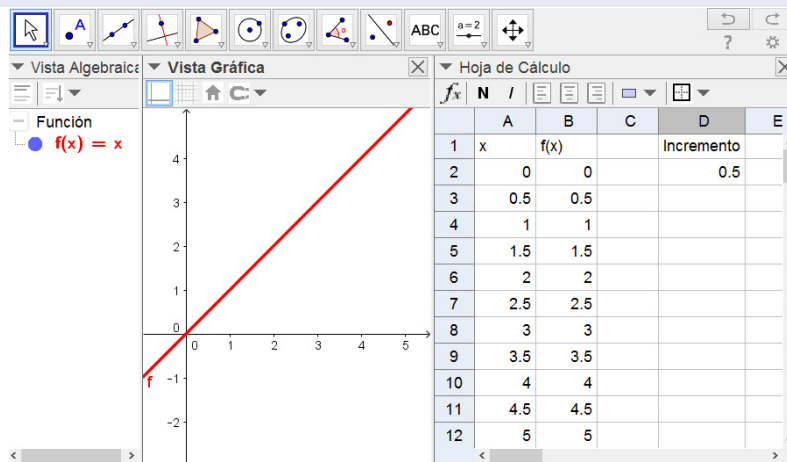


Figura 5. Tabla de valores para la función .

- 12) En la Barra de Entrada y escribe en ella $g(x)=x^2$, esto creará en las Vistas Gráfica y Algebraica una función llamada .
- 13) Cambia color y grosor a la función según tu preferencia, no cambies su nombre.
- 14) Realiza los siguientes pasos en la Vista de Hoja de Cálculo:
 - Escribe "g(x)" en la celda C1.
 - En la celda C2 escribe $=g(A2)$.
 - Arrastra la esquina inferior derecha de la celda C2 (aparece un cuadro azul) y suéltala en la celda C12, aparecerá la evaluación para la función .

Nota: Los pasos descritos anteriormente crean una tabla de valores en la Vista de Hoja de Cálculo para la función en el intervalo de con incremento de 0.5, lo anterior se ilustra en la figura 6.

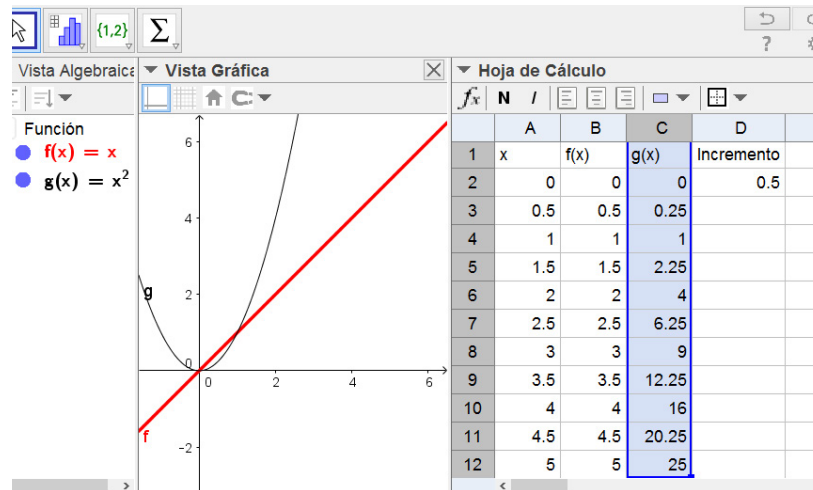


Figura 6. Tabla de valores para la función .

- 15) Sobre la Vista Gráfica 1, da clic derecho sobre la gráfica de la función , después da clic sobre *Propiedades* y en la ventana *Básico* desmarca la casilla de Objeto fijo. Cierra la ventana emergente de *Propiedades*.
- 16) Sobre la Vista Gráfica 1, da clic izquierdo sobre la gráfica de la función y mantenlo presionado; arrastra la gráfica de la función hasta otra posición en la Vista Gráfica 1.
- 17) Observa la ecuación de la función en la Vista Algebraica y la columna C en la Vista de Hoja de Cálculo, anota tus observaciones en el siguiente cuadro:
- 18) Da clic sobre la celda A2, mantenlo presionado y arrástralo hasta la celda A12, de esta forma se seleccionan los valores de las Celdas A2 hasta A12.
- 19) Presiona y mantén presionada la tecla Ctrl en tu teclado y después da clic sobre la celda C2, mantén presionado y arrástralo hasta la celda C12, para seleccionar todo el

conjunto de celdas desde A2 hasta A12 y de C2 hasta C12; deberá observarse la selección como la figura 7 (una vez seleccionados los datos puedes soltar la tecla Ctrl).

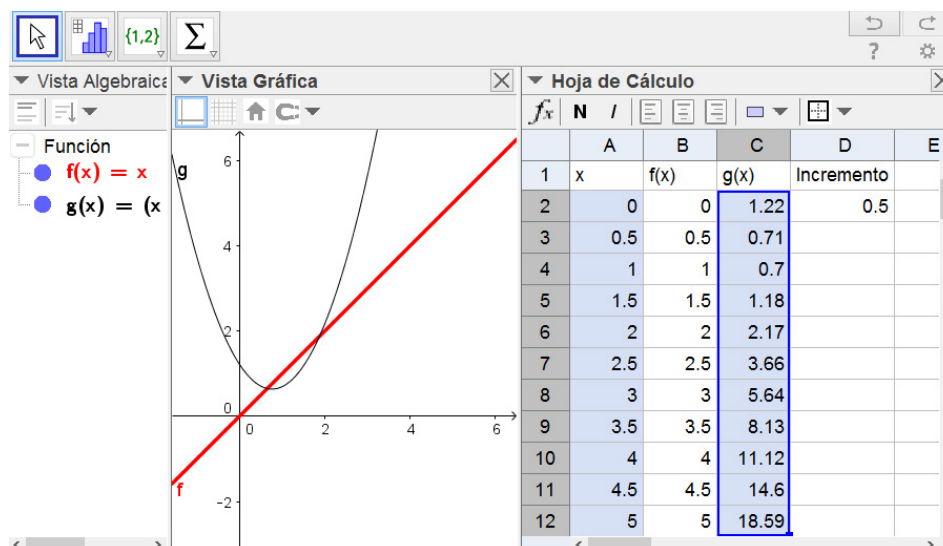


Figura 7. Hoja de Cálculo con datos seleccionados.

20) Da clic derecho sobre los datos seleccionados y en la siguiente tabla anota las opciones que se presentan con los datos:

Opción	Acción

Nota: Opciones de la selección de datos de la Hoja de Cálculo.

21) Con los datos aún seleccionados, elige la opción Crea y después Lista de Puntos, describe lo que observas en las Vistas Gráfica 1 y Algebraica en el siguiente cuadro.

Nota: Si diste clic en algún otro lado de la Vista de Hoja de Cálculo o en alguna otra herramienta, la opción de Lista de Puntos aparecerá en color gris y no podrá elegirse, para habilitarla es necesario seleccionar de nuevo los datos de la Vista de Hoja de Cálculo (esto es repitiendo los pasos 17 y 18).

22) Nuevamente selecciona la opción Crea y después Poligonal; oculta la función $g(x)$, describe lo que sucede en la Vista Gráfica 1 en el siguiente cuadro.

Nota: Si diste clic en algún otro lado de la Vista de Hoja de Cálculo o en alguna otra herramienta, la opción de Poligonal aparecerá en color gris y no podrá elegirse, para habilitarla es necesario seleccionar de nuevo los datos de la Vista de Hoja de Cálculo (esto es repitiendo los pasos 17 y 18).

23) Da clic izquierdo sobre la letra B de la columna B, de esta manera se seleccionará toda la columna B, una vez seleccionada, da clic derecho sobre alguno de los datos y selecciona la opción Elimina Columna B.

24) Selecciona los datos contenidos de las celdas A1 hasta B12 (siguiendo el procedimiento mencionado en el paso 18 de esta práctica), da clic derecho sobre ellos y selecciona la Opción Crea y después Tabla, describe lo que ocurre en la Vista Gráfica 1 en el siguiente cuadro.

25) Utilizando la Vista Algebraica, oculta todos los objetos presentes en la Vista Gráfica 1, excepto la Tabla, activa como objeto visible la función y muévela a otra parte de la Vista Gráfica, describe los cambios que observas en la Tabla en la Vista Gráfica 1 en el siguiente cuadro.

Nota: Puedes seleccionar objetos en conjunto usando la Vista Algebraica mediante el siguiente procedimiento:

- Selecciona un objeto de la Vista Algebraica.
- Presiona y mantén presionada la tecla Ctrl.
- Da clic derecho sobre cualquiera de los objetos.
- Selecciona la opción Objeto visible.

26) Abre el submenú de la herramienta Texto, y selecciona la herramienta Inspección de funciones.

27) Utilizando esta herramienta, da clic izquierdo sobre la gráfica de la función, se abrirá una ventana emergente como la que se muestra en la figura 8:

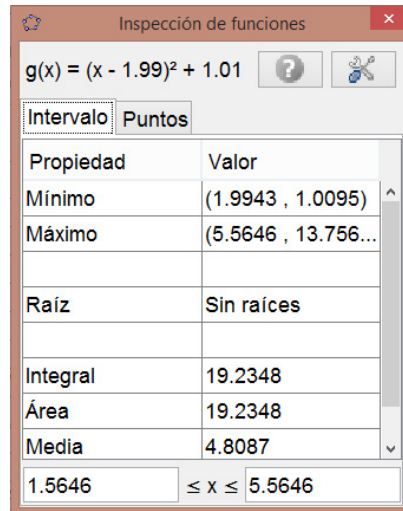


Figura 8. Ventana del inspector de funciones.

28) En la parte inferior de la ventana emergente, cambia el intervalo por .

29) Responde lo siguiente en el cuadro

- ¿Qué información te proporciona sobre la función el Inspector de funciones?

30) Realiza una captura de pantalla de la ventana completa de GeoGebra y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

31) Guarda la construcción como Practica6a y abre un nuevo documento de GeoGebra.

Práctica 6b

Instrucciones:

Esta práctica consistirá en simular una serie de datos aleatorios, de los cuales se realizará un análisis estadístico utilizando las herramientas y funciones de la Hoja de Cálculo de GeoGebra, el problema a abordar es el siguiente:

- En cierta escuela se quieren ajustar los precios de los productos que se venden en la cafetería según la cantidad de dinero que los niños suelen traer consigo, para que los productos sean accesibles para la mayoría de ellos; en la realización de este estudio se eligieron 100 niños al azar de la población total (considerando que esta sería una muestra significativa) y se les preguntó ¿cuánto dinero te dan tus papás para el recreo?, los datos obtenidos de la encuesta se utilizaron para realizar los ajustes necesarios.
 - ¿Cuánto dinero llevan en promedio los niños a la escuela?
 - ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar?
 - Genera un histograma con los datos.
- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra y configura el tamaño de letra y redondeo de decimales según tu preferencia.
 - 2) En el menú Vista, activa la Hoja de Cálculo y desactiva las Vistas Algebraica y Gráfica 1.
 - 3) Activa la visualización de funciones fx de la Hoja de Cálculo, siguiendo el procedimiento que se describe en el paso 9 de la *práctica 6a*.
 - 4) Realiza los siguientes pasos en la Vista de Hoja de Cálculo.
 - Posiciónate en la celda A1 escribe "Niño", presiona la tecla Enter.
 - En la celda B1 escribe "Dinero", presiona la tecla Enter.
 - En la celda A2 y escribe 1, presiona la tecla Enter.
 - En la celda A3, escribe en la Barra de Función: $=A2+1$, presiona la tecla Enter, la Barra de Función se encuentra en la parte superior del nombre de las celdas, su ubicación se muestra en la figura 9.

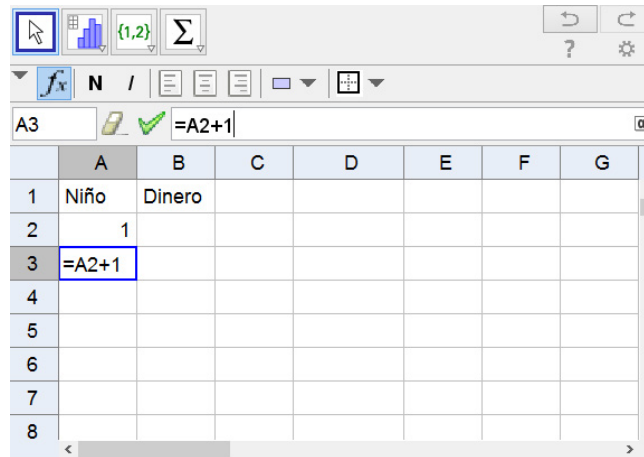


Figura 9. Ubicación de la Barra de Función en la Hoja de Cálculo.

- Arrastra la celda A3 (utilizando el cuadro de la esquina inferior derecha de la celda) hasta la celda A101.
- Posiciónate en la celda B2 y en la Barra de Función escribe: $=\text{AleatorioEntre}(0,25)$.

Nota: Este comando permite generar números aleatorios entre un rango de valores enteros, en este caso será entre 0 y 25, este comando tiene 2 variantes con sintaxis parecida: $\text{AleatorioEntre}(\text{<Mínimo (número o valor numérico)>, <Máximo (número o valor numérico)>}$ y $\text{AleatorioEntre}(\text{<Mínimo (número o valor numérico)>, <Máximo (número o valor numérico)>, <Fijo o no (true/false)>}$, la primer variante genera números aleatorios cada vez que se actualiza el programa, la segunda variante genera datos aleatorios una vez y los mantiene fijos aunque el programa se actualice.

- Arrastra la esquina inferior derecha de la celda B2 hasta llegar a la celda B101, así a cada uno de los 100 niños le corresponderá uno de los números aleatorios.
- 5) Selecciona la columna B de la Vista de Hoja de Cálculo.
- 6) Da clic sobre la herramienta Análisis de una Variable, cuyo icono es el siguiente: , se abrirá una ventana emergente como la que se muestra en la figura 10.

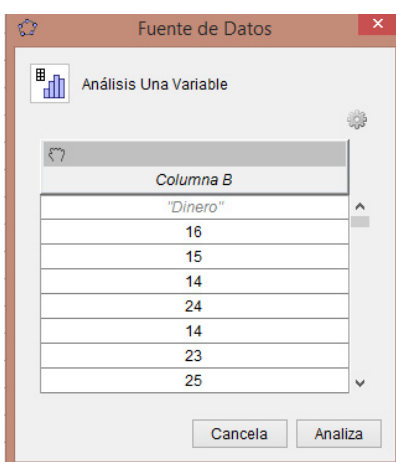


Figura 10. Ventana emergente de la herramienta Análisis de una Variable.

7) El título de la ventana emergente es Fuente de Datos, que proporciona como información los datos seleccionados de la Vista de Hoja de Cálculo, en este caso lo contenido en la columna B que corresponde al dato de *Dinero*.

8) Aparecerá una nueva ventana emergente llamada Análisis de datos.

- ¿Qué información te proporciona esta nueva ventana?, escríbelo en el siguiente cuadro.

9) De la ventana de Análisis de datos, clic en el menú desplegable donde dice *Histograma*, aparecerán las diferentes opciones de visualización de datos, en la siguiente tabla escribe cuáles son estas opciones de visualización.

Opciones para visualización de datos

Nota: Opciones posibles para la visualización de histogramas.

- 10) Realiza una captura de pantalla de cada una de las opciones para visualización de datos y guarda las imágenes para anexarlas a tu reporte.
- 11) Selecciona Histograma de nuevo, al lado derecho del menú desplegable se encuentra un Deslizador (cuya ubicación se muestra en la figura 11).

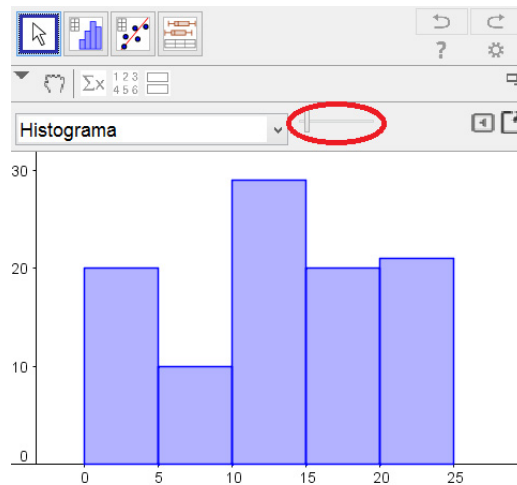


Figura 11. Ubicación del deslizador en la ventana de Análisis de datos.

- 12) Mueve el deslizador y describe lo que le ocurre al histograma en el siguiente cuadro.
- 13) En la parte superior del menú desplegable se encuentran 4 herramientas básicas para el Análisis de datos, estas herramientas sirven para realizar el *Análisis de datos de una variable*, y se encuentran debajo de los iconos de las herramientas de selección, como se muestra en la figura 12.

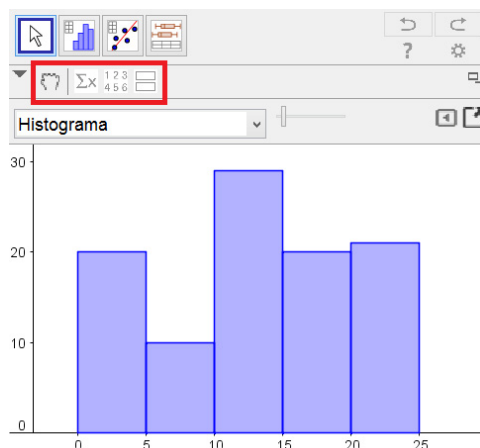


Figura 12. Herramientas del Análisis de una Variable

14) Utiliza las 4 herramientas y en la siguiente tabla describe qué función tiene cada una de ellas.

Herramienta	Icono	Función
Listado de Datos		
Mostrar Estadísticas	Σx	
Mostrar Datos	$\begin{matrix} 123 \\ 456 \end{matrix}$	
Segunda Vista Gráfica		

Nota: Herramientas del Análisis de una Variable.

15) Da clic sobre el icono de Mostrar Estadísticas (Σx), del lado izquierdo de la ventana de *Análisis de datos* aparecerá una división titulada *Estadísticas* (si no puede visualizarse por completo la información estadística, maximiza el tamaño de la ventana de Análisis de datos posicionando el puntero del mouse en la esquina inferior izquierda de la ventana, dando clic izquierdo, sosteniéndolo y arrastrando la esquina hasta llegar al tamaño adecuado para visualizar los datos).

- ¿Qué información te proporciona esta ventana de *Estadísticas*?, descríbelo en el siguiente cuadro.

Nota: Con lo visto hasta este momento ya es posible responder el problema planteado al principio de la práctica 6b, sin embargo, se seguirán explorando las opciones que ofrece la herramienta de análisis estadístico.

- 16) Al igual que la forma de visualización de datos en histogramas, existe un menú desplegable para las estadísticas, da clic sobre dicho menú desplegable y escribe las opciones que te proporciona.

Opciones para análisis estadístico

Nota: A partir de este punto se explorarán las opciones para Análisis multivariable.

- 17) Cierra la ventana de Análisis de datos, del submenú de la herramienta Análisis de una variable, selecciona la herramienta Análisis Regresión de Dos Variables cuyo icono es el siguiente: .
- 18) Se abrirá una nueva ventana emergente con título *Fuente de datos*, que permite seleccionar una nueva lista de datos para realizar análisis respecto a dos variables, la ventana emergente se muestra en la figura 13.

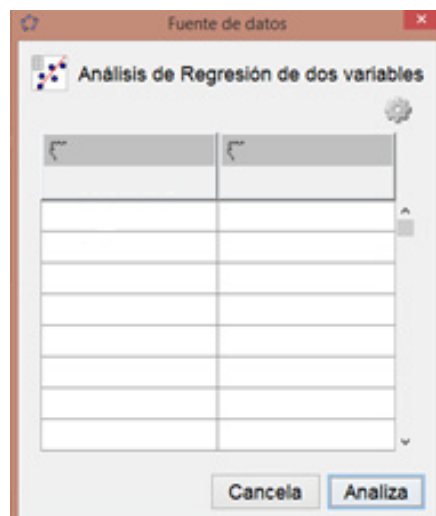


Figura 13. Ventana emergente de selección de datos para selección de Fuente de datos para Análisis de Dos Variables.

- 19) En la ventana emergente, posiciona el puntero sobre el icono de la mano cerrada () en la primera columna de datos hasta que cambie a color blanco () ; da clic sobre la mano, los datos de la columna B se volverán a copiar.
- 20) No cierres la ventana emergente, posíciónate en la Vista de Hoja de Cálculo y selecciona la columna A.
- 21) En la ventana emergente, posiciona el puntero sobre el icono de la mano cerrada () en la segunda columna de datos hasta que cambie a color blanco () ; da clic sobre la mano.
- 22) Los datos de la columna A serán copiados automáticamente a la tabla, da clic en el icono del engrane () y activa la opción Encabezado(s) como título(s), posteriormente da clic en Analiza.
- 23) La ventana de *Análisis de datos* se actualizará para mostrar diagramas de dispersión (En caso de no aparecer, da clic sobre la herramienta que activa la ventana de *Análisis estadístico* y después sobre el icono $X \rightleftharpoons Y$), ¿Qué información te proporciona la ventana de *Análisis de datos*?
- 24) Escríbelo en el siguiente cuadro.

Nota: La información seleccionada para crear los diagramas de dispersión corresponde la primera columna al eje Y y la segunda al eje X, en este caso, el eje X son los Niños y el eje Y el Dinero.

- 25) Da clic en el menú desplegable donde dice Diagrama de Dispersión, aparecerán las diferentes opciones de visualización de datos, en la siguiente tabla escribe cuáles son estas opciones de visualización.

Opciones de visualización de datos

Nota: Opciones de visualización de diagramas de dispersión.

26) La ventana de Análisis Regresión de Dos Variables tiene 5 herramientas básicas, como se muestra en la figura 15.

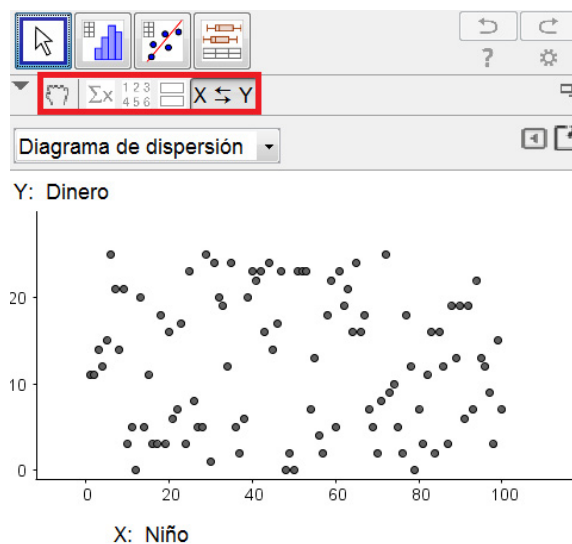


Figura 15. Herramientas del Análisis Regresión de Dos Variables.

27) Explora las 5 herramientas y en la siguiente tabla describe qué función tiene cada una de ellas.

Herramienta	Icono	Función
Listado de Datos		
Mostrar Estadísticas	Σx	
Mostrar Datos	123 345	
Segunda Vista Gráfica		
Orden	$X \leftrightarrow Y$	

Nota: Herramientas del Análisis Regresión de Dos Variables.

28) Este paso es opcional: da clic en la herramienta Orden de tal forma que los datos de la Niño correspondan al eje X del diagrama de dispersión y los de la Dinero al eje Y.

29) En la figura 16 se muestra la ubicación del menú desplegable de Modelo de Regresión de la ventana de *Análisis de datos*.

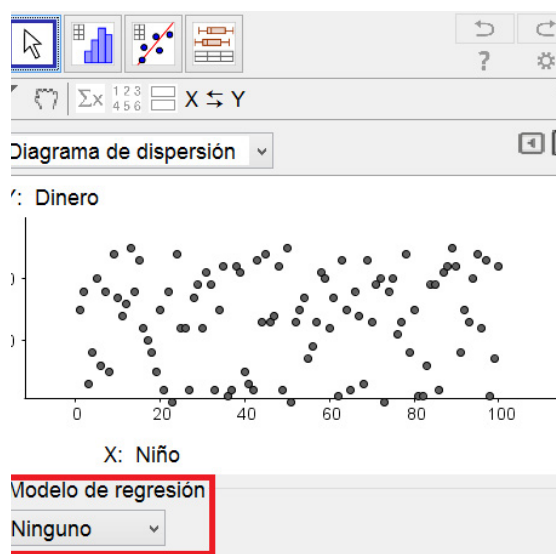


Figura 16. Herramientas del Análisis Regresión de Dos Variables.

30) Da clic en el menú desplegable de Modelo de regresión y en la siguiente tabla escribe las opciones de modelos de regresión que GeoGebra te permite utilizar.

Modelos de regresión disponibles

31) Realiza una captura de pantalla de cada una de las opciones para Modelo de regresión y guarda las imágenes para anexasarlas a tu reporte.

32) Cierra la ventana de *Análisis de datos*.

33) En la Vista de Hoja de Cálculo, del submenú de la herramienta de Análisis de una variable (📊) selecciona la herramienta de Análisis Multivariable (📈), se abrirá una nueva ventana emergente titulada *Fuente de datos* como se muestra en la figura 17.

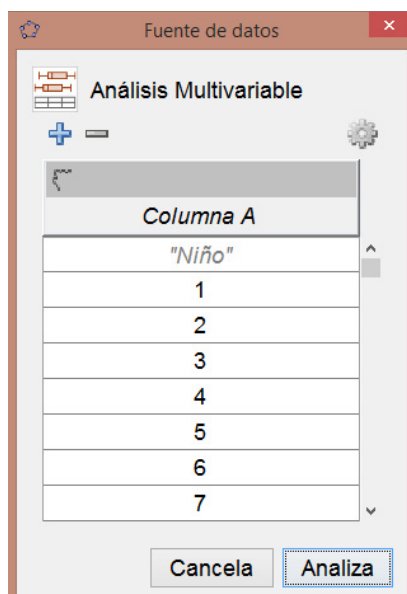


Figura 17. Ventana emergente de la herramienta Análisis Multivariable.

34) Los iconos  y  permiten ingresar una nueva columna de datos, da clic sobre el icono  y anota lo que observas en el siguiente cuadro.

35) Selecciona la columna B de la Vista de Hoja de Cálculo y da clic sobre el icono de la mano en la segunda columna para copiar los datos.

36) Da clic sobre el icono de engrane , selecciona la opción Encabezado(s) como título(s) aparece y anota tus observaciones en el siguiente cuadro, da clic en Analiza.

37) Aparecerá una nueva ventana emergente titulada *Análisis de datos*, similar a la que se muestra en la figura 18.

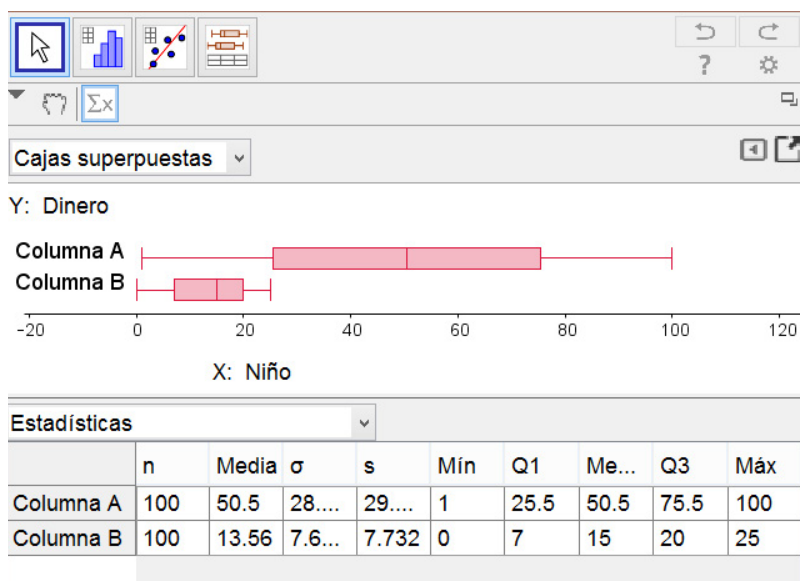


Figura 18. Ventana emergente de Análisis Multivariable de datos.

38) ¿Qué información te proporciona esta nueva ventana de *Análisis de datos*?, descríbelo en el siguiente cuadro.

39) Da clic sobre el menú abatible de *Estadísticas* en la parte inferior de la ventana de *Análisis de datos*, anota las opciones que permite el programa en la siguiente tabla.

Opciones de visualización de Estadísticas

Nota: Opciones estadísticas para la herramienta de Análisis Multivariable.

40) Realiza una captura de pantalla de la ventana completa de GeoGebra y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

41) Guarda la construcción como Practica6b y cierra el programa.

Práctica 6c

- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra y activa las Vistas de Hoja de Cálculo, Algebraica y Gráfica. Configura el tamaño de letra a tu gusto.
- 2) Sobre la Vista de Hoja de Cálculo, escribe "x" y "y" en las celdas A1 y B1 respectivamente.
- 3) Da doble clic en la casilla A2 y escribe el comando `=AleatorioEntre(-3, 3)`, posteriormente arrastra la esquina inferior derecha de la celda para cubrir desde A2 hasta B8. Esto deberá visualizarse del siguiente modo (los números son aleatorios entre -3 y 3, podrían ser distintos en su Hoja de Cálculo) como se muestra en la figura 19.

Hoja de Cálculo			
	A	B	C
1	x	y	
2	2	3	
3	-3	-2	
4	-1	3	
5	3	-1	
6	2	2	
7	1	-3	
8	-1	0	

Figura 19. Números aleatorios generados en este caso.

- 4) En la Vista Gráfica inserta un deslizador, configúralo como Ángulo entre 0° y 360° , con incremento de 1° y ponle por nombre a.
- 5) En la celda E1 escribe "Rota", posteriormente captura los siguientes comandos en las celdas dando doble clic sobre ellas:

E2 =cos(a)	F2 =-sen(a)
E3 =sen(a)	F3 =cos(a)

- 6) Selecciona el rango de celdas A2 a B8, da clic derecho sobre ellas y selecciona el menú desplegable Crea, este deberá visualizarse del siguiente modo (figura 20):

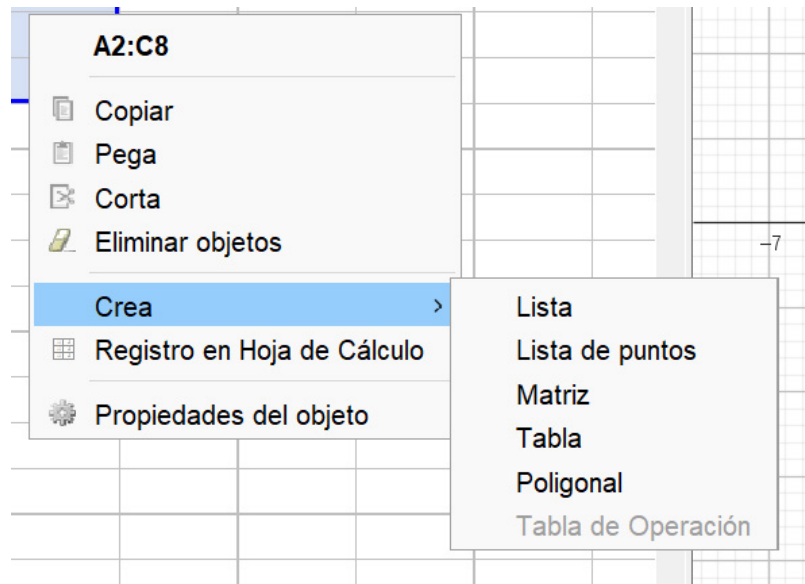


Figura 20. Opciones del menú Crea.

- 7) Selecciona la opción Lista de puntos.
- 8) Abre nuevamente el menú Crea y selecciona la opción Matriz.
- 9) Revisa la Vista Algebraica y anota lo que observas en el siguiente cuadro:
- 10) Selecciona el rango de celdas de E2 a F3 y utiliza el menú Crea para crear otra matriz.
- 11) Realiza la multiplicación de las matrices "m1" y "m2" escribiendo $m1 \cdot m2$ en la Barra de entrada.
- 12) En la Barra de entrada, escribe los siguientes comandos:
- Secuencia(Elemento($m3, t + 1, 1$), $t, 0, 8$)
- Secuencia(Elemento($m3, 1 + t, 2$), $t, 0, 8$)

13) Anota tus observaciones en el siguiente cuadro.

14) Escribe "xr" y "yr" en las celdas A10 y B10 respectivamente

15) En el rango de celdas A11 a B17, escribe los siguientes comandos de forma individual dando doble clic sobre la celda correspondiente:

A11 =Elemento(I2, 1)	B11 =Elemento(I3, 1)
A12 =Elemento(I2, 2)	B12 =Elemento(I3, 2)
A13 =Elemento(I2, 3)	B13 =Elemento(I3, 3)
A14 =Elemento(I2, 4)	B14 =Elemento(I3, 4)
A15 =Elemento(I2, 5)	B15 =Elemento(I3, 5)
A16 =Elemento(I2, 6)	B16 =Elemento(I3, 6)
A17 =Elemento(I2, 7)	B17 =Elemento(I3, 7)

16) Selecciona el rango de celdas de A11 a B17, da clic derecho sobre ellas y crea una lista de puntos.

17) Cambia el color de estos puntos (H a N en la Vista Algebraica) al de tu preferencia y activa el Rastro.

18) Mueve el deslizador "a", utiliza el siguiente cuadro para anotar tus observaciones.

Sección de preguntas de la práctica 6

En referencia a la *práctica 6a*.

- Describe y realiza el procedimiento para graficar y obtener una tabla de valores en el intervalo de con incrementos de 0.2 para la función .

Nota: La forma de escribir exponentes en GeoGebra es similar a la forma de escribirlos en una calculadora científica.

- Utiliza el inspector de funciones para encontrar el valor mínimo que alcanza la función en el intervalo indicado, ¿cuál es este valor?

En referencia a la *práctica 6b*.

- Utiliza la Vista de Hoja de Cálculo para simular el experimento de lanzar dos dados 150 veces y encontrar el producto de los números obtenidos de cada lanzamiento, utiliza el comando `AleatorioEntre(1,6,True)` para simular los lanzamientos de los dados. Realiza una captura de pantalla del experimento.

- Encuentra la desviación estándar y el promedio utilizando la herramienta de Análisis de una variable y la herramienta de Estadísticas, ¿qué valores obtuviste?
- ¿Qué valores se obtendrían si repites el experimento 2, 3 o 50 veces?, ¿serían distintos o similares?

En referencia a la *práctica 6c*.

- ¿Qué modificaciones realizarías para una matriz de rotación de 3×3 ?
- ¿Qué modificaciones realizarías para que la referencia de la Rotación sea un punto distinto al origen del plano?

De forma general respecto a la práctica.

- ¿Cómo utilizarías estas herramientas en tu práctica docente?
- ¿Qué actividades extras deberían agregarse para adaptarlo al nivel educativo donde laboras?

Práctica 7 – Cálculos de Probabilidad con GeoGebra

El uso de Software en la Didáctica de la Probabilidad y la Estadística ha incrementado en forma significativa, puesto que los conceptos de esta disciplina que normalmente son complicados o abstractos se vuelven más accesibles, debido a que pueden ser visualizados e incluso es posible interactuar con los fenómenos estudiados de forma más eficiente.

GeoGebra permite realizar simulaciones interactivas de los temas presentes en el currículo escolar, entre ellos: Estadística descriptiva, Probabilidad, Variables aleatorias, Modelación utilizando variables aleatorias e Inferencia estadística (paramétrica y no paramétrica).

Práctica 7a

Instrucciones:

- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra, activa las Vistas Gráfica, Hoja de Cálculo y Algebraica, reacomoda las ventanas para visualizarlas de la siguiente forma, no desactives los ejes, quizás sea necesario redimensionar la Vista Gráfica para visualizar algunos de los pasos a realizarse:

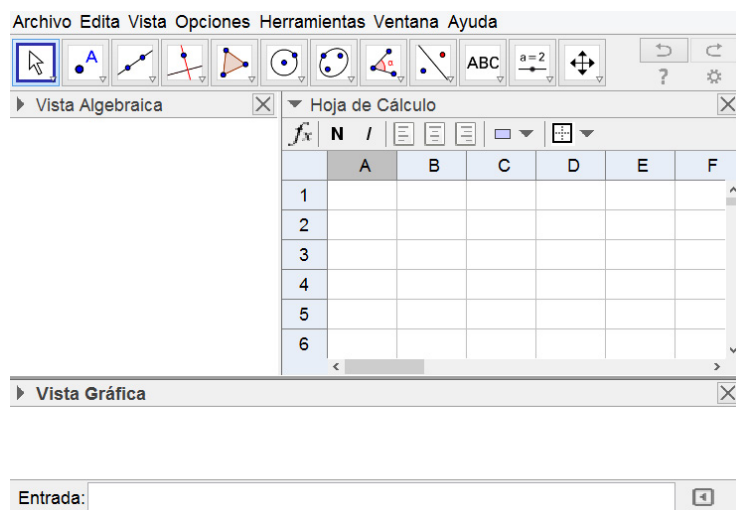


Figura 1. Acomodo de las ventanas para la práctica 7.

- 2) Copia los siguientes datos a la Hoja de Cálculo de GeoGebra, se trata de 200 muestras de pesos de diferentes personas, para ello selecciona los datos y abarca el rango de las celdas A1 hasta J20.

Pesos (kg) N=200									
78	63	73	75	45	96	100	71	74	65
79	120	49	71	80	87	93	87	66	72
81	52	47	76	73	93	82	115	56	46
60	114	97	87	80	70	60	89	114	103
73	62	85	47	60	72	108	71	51	53
80	79	98	92	60	83	83	120	67	82
46	79	89	62	84	55	81	119	100	60
70	74	96	66	78	58	59	102	69	84
89	81	93	49	57	56	45	82	90	57
77	60	112	83	64	101	97	60	108	72
68	88	80	52	109	51	64	56	115	120
103	101	119	114	120	82	72	102	63	49
78	104	108	71	53	50	82	74	54	87
76	80	74	94	49	83	65	90	65	108
98	57	111	82	61	81	112	101	50	68
84	110	82	72	119	49	88	118	101	50
73	111	75	69	72	111	113	79	69	118
68	50	72	110	87	49	107	45	119	107
94	56	109	105	97	71	69	74	58	87
54	71	76	58	95	100	120	77	46	99

- 3) En la Vista de Hoja de Cálculo, selecciona todos los datos y da clic derecho sobre ellos, se abrirá el menú de opciones que se muestra en la imagen, de él, selecciona Crea y posteriormente Lista, en la Vista algebraica aparecerá un objeto llamado *l1*.

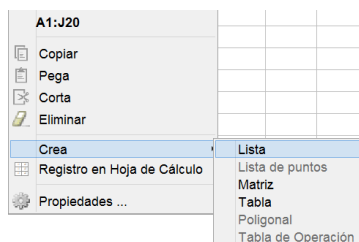


Figura 2. Opciones de la selección de datos.

- 4) En la barra de entrada escribe el comando $u=Media(l1)$, el comando que se utiliza en éste paso tiene la siguiente sintaxis: $Media(<Lista\ de\ datos\ brutos>)$, el resultado que se obtiene es un número llamado media (μ).

Nota: Es posible utilizar el comando $Media(<Lista\ de\ números>, <Lista\ de\ frecuencias>)$, la diferencia es la necesidad de crear dos listas, una con los datos y otra con la frecuencia individual de cada uno, por ejemplo: $Media(\{1,2,3\},\{1,2,3\})$ obtendrá la media de 6 datos que son 1, 2, 2, 3, 3, 3.

- 5) En la barra de entrada escribe el comando $s=sqrt(Varianza(l1))$, este comando utiliza la anidación de los comandos $sqrt(<número>)$ que calcula la raíz cuadrada de un número dado y $Varianza(<Lista\ de\ datos\ brutos>)$ que calcula la varianza (σ^2) con dos decimales de precisión, al utilizar la anidación de estos comandos se obtiene la desviación estándar (σ) de los datos con dos decimales de precisión.
- 6) En la barra de entrada escribe el comando $PQ=Q1(l1)$, este comando permite encontrar el primer cuartil de un conjunto de datos, el comando es $Q1(<Lista\ de\ datos\ brutos>)$, el resultado es el número PQ.
- 7) En la barra de entrada escribe el comando $M_e=Mediana(l1)$, este permite encontrar la mediana de un conjunto de datos, la sintaxis del comando es $Mediana(<Lista\ de\ datos\ brutos>)$, el resultado obtenido es el número M_e .
- 8) En la barra de entrada escribe el comando $TQ=Q3(l1)$, este comando permite encontrar el tercer cuartil de un conjunto de datos, el comando es $Q3(<Lista\ de\ datos\ brutos>)$, el resultado es el número TQ.

Nota: El método que GeoGebra utiliza para calcular los cuartiles Q1 y Q3 es el descrito por Moore y McCabe (2002).

- 9) En la barra de entrada escribe los comandos:
- $Per1=Percentil(l1,.25)$
 $Per2= Percentil(l1,.50)$
 $Per3= Percentil(l1,.75)$

Nota: El comando $Percentil(<Lista\ de\ números>, <Porcentaje>)$, recibe una lista de datos y el porcentaje donde quiere ser calculado el percentil, los datos no necesariamente deben estar acomodados para realizar el cálculo, el porcentaje debe ser un número .

- 10) Compara los resultados obtenidos en los pasos 6, 7 y 8 con los obtenidos en el paso 9, ¿Deberían ser distintos o iguales?, en caso de ser distintos, investiga la razón, puedes

utilizar como referencia la Wiki oficial de GeoGebra (<https://wiki.geogebra.org>), tu respuesta puedes escribirla en el siguiente cuadro:

- 11) En la barra de entrada escribe el comando `TablaFrecuencias(l1,1)`, este comando crea una tabla de dos columnas y n renglones, ordenando los datos de forma ascendente, la primera columna corresponde a los datos y la segunda corresponde al recuento de los datos, la sintaxis del comando es `TablaFrecuencias(<Lista de datos brutos>, <Factor de escala (opcional)>)`, el factor de escala es opcional y multiplica la ocurrencia de los datos por dicho valor.

Nota: El comando `TablaFrecuencias` también funciona con listas que contengan textos y no sólo números.

- 12) Escribe el comando `Min=Mínimo(l1)`, este comando con sintaxis `Mínimo(<Lista>)`, encuentra el valor mínimo de una lista de datos, el resultado será el número llamado Min.
- 13) Escribe el comando `Max=Máximo(l1)`, este comando con sintaxis `Máximo(<Lista>)`, encuentra el valor máximo de una lista de datos, el resultado será el número llamado Max.
- 14) Escribe el comando `Hist1=Histograma({Min, Per1, Per2, Per3, Max}, l1)` y posteriormente el comando `Hist2=Histograma({Min, PQ, M_e, TQ, Max}, l1)`, compara ambos histogramas y escribe tus observaciones en el siguiente cuadro, realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte:

Nota 1: Es posible que debas alejar la Vista Gráfica para poder observar los histogramas de forma correcta.

Nota 2: El comando Histograma tiene la siguiente sintaxis Histograma(<Lista de Clases>, <Lista de Alturas>), la lista de clases utilizada en el ejemplo del paso 14 es {Min,Per1,Per2,Per3,Max}, por lo que se tendrá un histograma de 4 barras, los intervalos de clase son Min-Per1, Per1-Per2, Per2-Per3 y Per3-Max, la lista de alturas corresponde a la lista de datos brutos utilizados desde el principio de la práctica, el resultado es un área Hist1=200, este número corresponde a la cantidad de datos contenidos en la lista.

- 15) En la barra de entrada escribe el siguiente comando $lon=Longitud(l1)$; el comando Longitud(<Objeto>), da como resultado el valor numérico de la longitud de un objeto, en este caso, nos indica la cantidad de datos contenidos en la $l1$.
- 16) Inserta un deslizador, nómbralo *num*, sus límites de 1 a $lon-1$ e incremento de 1.
- 17) Escribe en la barra de entrada $Interv=(Max-Min)/num$
- 18) Escribe el siguiente comando en la barra de entrada: $Clases=Secuencia(k, k, Min, Max, Interv)$, se obtendrá como resultado una lista de datos llamada Clases que contendrá como elementos los límites de clase que se utilizarán para crear un histograma dinámico, con un número *num* de barras, dichas barras estarán contenidas en el intervalo de Min a Max.
- 19) Oculta a Hist1 y Hist2 y escribe el siguiente comando en la barra de entrada: $Hist3=Histograma(Clases,l1)$, mueve el deslizador *num* y escribe tus observaciones en el siguiente cuadro, realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

20) Escribe el siguiente comando en la barra de entrada: `Pol=PolígonoFrecuencias(Cla-
ses,l1)`, mueve el deslizador num y describe lo que observas en la Vista Gráfica en el
siguiente cuadro, realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen
para anexarla a tu reporte.

Nota: El comando `PolígonoFrecuencias` tiene la misma sintaxis que el comando `Histo-
grama`, si el polígono de frecuencias se distorsiona después de mover el deslizador, bó-
rralo y vuelve a insertar el comando, la distorsión se debe a la saturación del programa por
la información y el procesamiento de los datos.

21) En la barra de entrada escribe el comando `QQ=GráficoQQ(l1)`, cambia el valor del desli-
zador num a 4 y describe tus observaciones en el siguiente cuadro, realiza una captura
de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

22) Inserta un nuevo deslizador, nómbralo Pob con intervalo de 10 a 30 e incremento de 1.

23) Oculta el histograma H3, el polígono Pol y el gráfico QQ y en la barra de entrada escri-
be el comando `Mu=Muestra(l1, Pob)`, este comando creará una lista de Pob elementos
tomados al azar de la lista de datos, la nueva lista se llamará Mu.

24) En la barra de entrada escribe el comando `T_{Stud}=TestMediaT(Mu,  $\mu$ , ">")`, este co-
mando proporciona el resultado de un Test T, la sintaxis del comando es: `TestMedia-
T(<Lista de datos (Muestra)>, <Media (Hipótesis)>, "Cola")`, la lista de datos es la mues-
tra Mu que se obtuvo en el paso 22, la hipótesis corresponde a la hipótesis nula en el
análisis y la cola puede ser ">", "<" o "≠", el resultado que se obtiene es un vector de 1
renglón x 2 columnas con dos elementos {Valor de probabilidad, Test T}

25) En la barra de entrada escribe el siguiente comando: `Dist=DistribuciónBinomial(Longitud(Mu), Elemento(T_{Stud}, 1))`, este comando tiene como sintaxis `DistribuciónBinomial( <Número de ensayos>, <Probabilidad de éxito> )`, en este caso, el número de ensayos corresponde al tamaño de la muestra (`Longitud(Mu)`) y la probabilidad de éxito es el primer elemento del vector `T_{Stud}`, el resultado del comando es un área llamada `Dist` que todo el tiempo es igual a 1, esto es debido a que se trata del total de probabilidad ($1=100\%$), realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.

26) Mueve el deslizador `Pob` y escribe tus observaciones en el siguiente cuadro:

27) Guarda la construcción como `Practica7a`, no la cierres.

Práctica 7b

Instrucciones:

- 1) En el menú `Vista`, selecciona la opción `Cálculos de Probabilidad`, deberá abrirse una ventana emergente como la que se muestra en la siguiente figura:

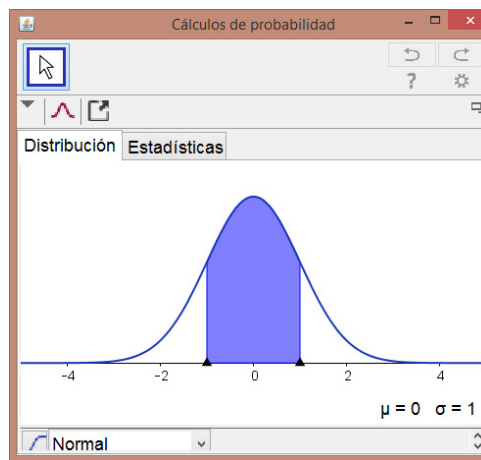


Figura 3. Ventana de Cálculos de Probabilidad de GeoGebra 5.0.

Nota: En la versión 4.4, esta vista de Probabilidad era una herramienta emergente contenida dentro del submenú de la herramienta Texto, se muestra en la siguiente imagen.

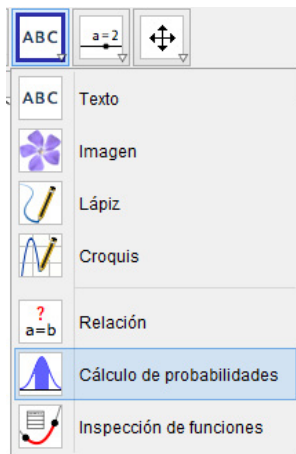


Figura 4. Ubicación de la herramienta de Cálculo de Probabilidad en GeoGebra 4.4.

- 2) Ubica el puntero del mouse sobre la línea indicada en la siguiente figura, da clic sobre ella y arrastra la línea hacia arriba para visualizar las opciones de la calculadora.

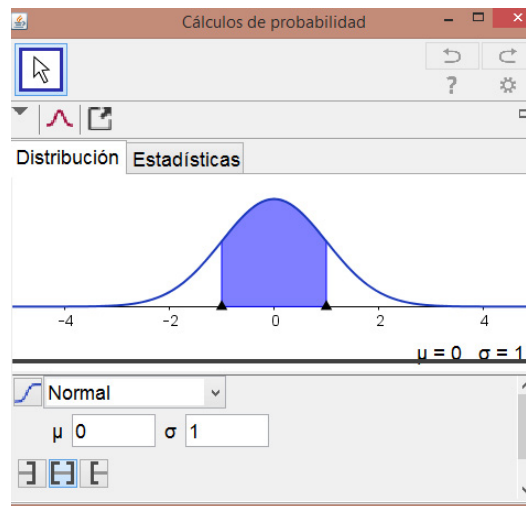


Figura 5. Opciones visibles de la calculadora.

- 3) En los espacios correspondientes a μ (media) y σ (Desviación estándar), escribe los valores μ y σ , que fueron declarados en los pasos 4 y 5 de la *práctica 7a*, realiza una captura de pantalla de este punto y guarda la imagen para anexarla a tu reporte.
- 4) Utilizando los botones , contesta las siguientes preguntas
- Al tomar al azar un elemento de la población.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el valor se encuentre entre 60 y 70?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el valor sea menor de 50?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el valor sea mayor de 90?

Nota: Los botones  permiten encontrar la probabilidad de un dato menor que uno dado, entre dos valores dados y mayor a un valor dado respectivamente, en relación con la distribución normal obtenida con la media y la desviación estándar proporcionadas; de igual manera se puede mover el gráfico de probabilidad son los iconos de triangulo negro que aparecen en el eje horizontal.

- 5) Da clic en la pestaña Estadísticas y en el menú desplegable, selecciona Test T de una Media.
- 6) En *Media* escribe =Media(Mu).
- 7) En *s* escribe =Sqrt(Varianza(Mu)).
- 8) En *N* escribe =Longitud(Mu).
- 9) En el espacio correspondiente a Hipótesis Nula, escribe (anota tus resultados en el cuadro debajo):

Hipótesis Nula = 60, Hipótesis Alternativa $\neq$.

Hipótesis Nula = 60, Hipótesis Alternativa $>$.

Hipótesis Nula = 60, Hipótesis Alternativa $<$.

Hipótesis Nula = 90, Hipótesis Alternativa $\neq$.

Hipótesis Nula = 90, Hipótesis Alternativa $>$.

Hipótesis Nula = 90, Hipótesis Alternativa $<$.

Nota: Los cálculos de probabilidad no son dinámicos, como en las vistas gráficas, para modificar los valores es necesario introducir a mano la información que se solicita.

- 10) Guarda la construcción como Practica7b.

Sección de preguntas de la práctica 7

- En la *práctica 7a*, de las medidas de tendencia central, la moda no fue calculada, ¿Cuál es el comando que permite calcularla?, ¿Cuál es su sintaxis?, Calcula la moda de los datos.

- En la *práctica 7b*, utilizando la calculadora de probabilidades, en la pestaña Estadísticas, selecciona la opción Intervalo T de una media y resuelve el siguiente problema:

En una muestra de 16 elementos, se tiene una media de 6 y una desviación típica de 10, si el intervalo de confianza es del 95%, ¿Es el valor de la media significativamente mayor que cero? Explique por qué:

De forma general respecto a la práctica.

- ¿Cómo utilizarías estas herramientas en tu práctica docente?

Reflexión: ¿Qué actividades extras deberían agregarse para adaptarlo al nivel educativo donde laboras?

UNIDAD 5

El Protocolo de Construcción

En ciertas ocasiones, es necesario desarrollar un applet de GeoGebra para una aplicación en específico, una ventaja existente articulando las tecnologías y bondades que provee Internet es el acceso a gran cantidad de información, siendo el uso de los foros oficiales de GeoGebra una herramienta muy útil para el desarrollador de applets, ya que en estos foros los usuarios comparten materiales creados por ellos.

Utilizar material creado por otras personas resulta muy enriquecedor, pues nos permite darnos una idea de cómo desarrollar nuevas aplicaciones para temas diferentes, es por ello que GeoGebra integra una Vista llamada Protocolo de Construcción, esta Vista permite observar, a modo de una lista de instrucciones, los pasos que llevaron a desarrollar el applet en cuestión, que si bien, no provee toda la información de la construcción, permite deducir gran cantidad de pasos intermedios. Sin embargo, es importante dar el crédito a los creadores originales de los applets que replicamos, para ello es importante referenciarlas en el formato adecuado.

Práctica 8 – La Vista de Protocolo de Construcción

La presente práctica constará de 3 partes, en la primera se mostrarán las distintas formas de activar la Vista de Protocolo de Construcción y las herramientas presentes en esta, en las segunda y tercera partes se proporcionan enlaces a applets de GeoGebra para que estas sean reproducidas de manera que su funcionamiento sea el mismo, o muy similar, a la construcción original.

En analogía con el uso de esta Vista de Protocolo de Construcción, es equivalente a vi-

sualizar la construcción del applet como si se tratara de una película dado que es una lista cronológica de todos los objetos creados en una construcción en GeoGebra, mostrando detalles como:

- El nombre del objeto
- El tipo de objeto (punto, recta, segmento, etc.)
- La definición (cómo fue creado)
- La descripción algebraica (si aplica)
- Las dependencias (de qué objetos depende)

Práctica 8a

Instrucciones:

- 1) Abre un nuevo documento de GeoGebra.
- 2) En la parte superior de la barra de menús, ubica la pestaña Vista, da clic sobre ella y selecciona la opción Protocolo de Construcción, la ubicación de la pestaña de Vista y la opción Protocolo de Construcción se muestran en la figura 1.

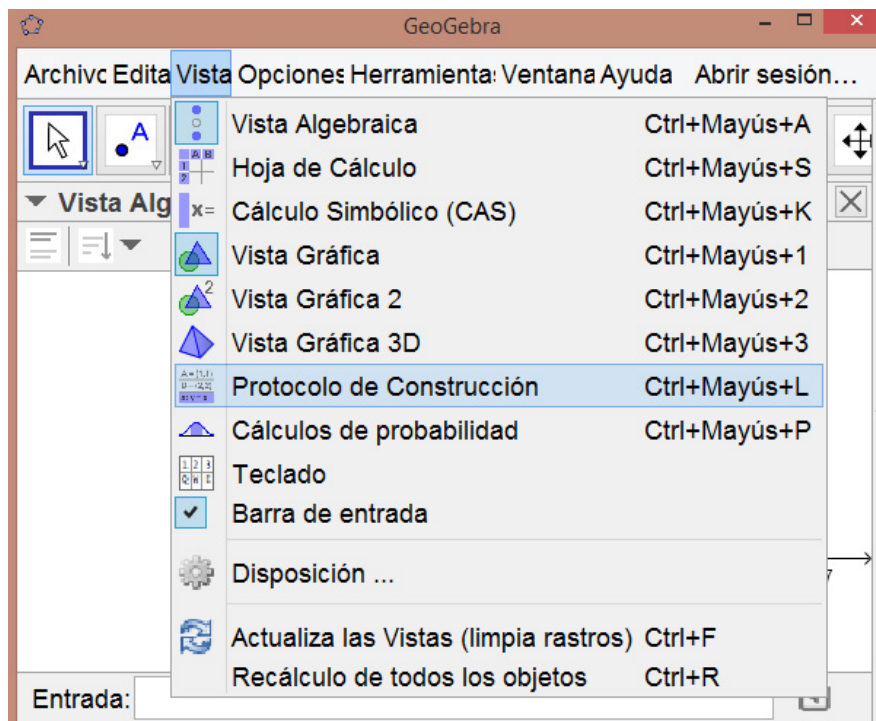


Figura 1. Una forma de activar la Vista de Protocolo de Construcción.

- 3) Una vez activada esta Vista, se mostrará la configuración de la ventana en GeoGebra que se observa en la figura 2 (nota: para propósitos ilustrativos, se han desactivado todas las demás Vistas).

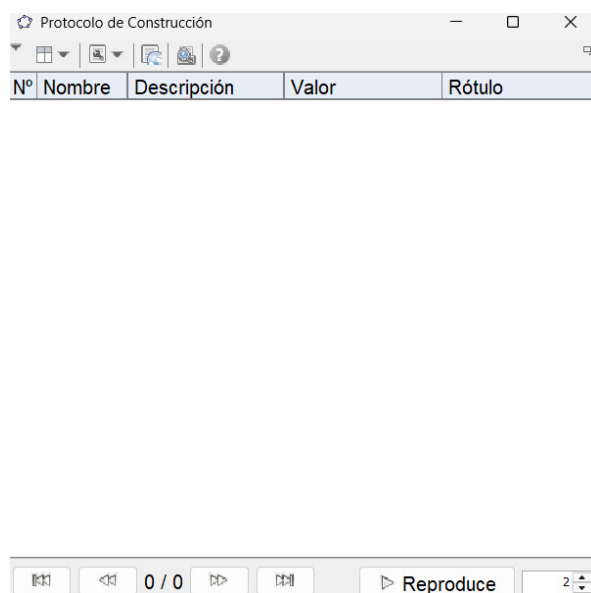


Figura 2. Vista de Protocolo de Construcción.

Nota: Alternativamente al paso 2, también es posible activar la Vista de Protocolo de Construcción mediante el comando del teclado Ctrl+Bloq Mayus+L cuando esta se encuentre desactivada.

- 4) La Vista de Protocolo de Construcción dispone de las siguientes herramientas, las cuales se enumeran en la siguiente tabla, con referencia a la figura 3.

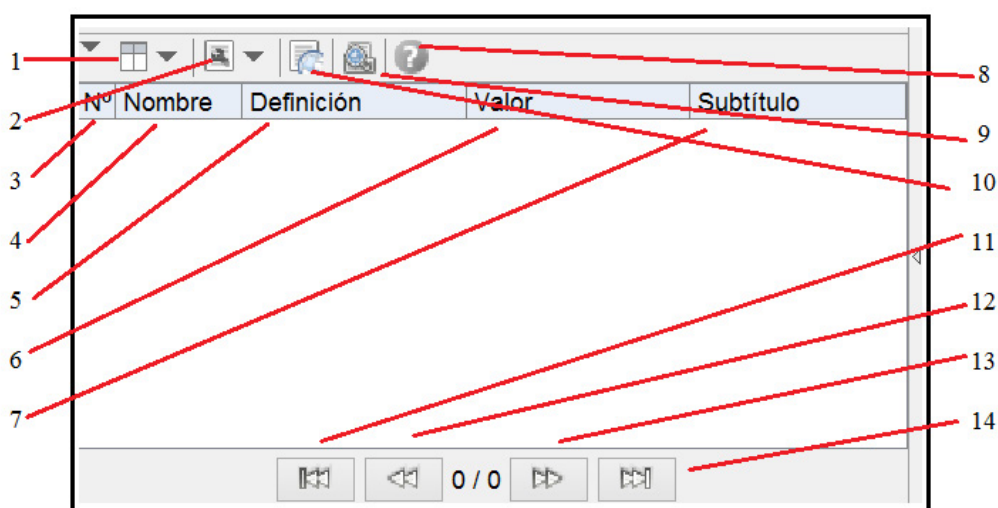


Figura 3. Herramientas de la Vista de Protocolo de Construcción.

Tabla 1.*Numeración de herramientas*

Número	Nombre de la herramienta	Descripción
1	Columnas	Permite quitar o agregar columnas de información a la Vista de Protocolo de Construcción.
2	Opciones	Permite ver las opciones de muestra del protocolo.
3	No.	Indica el orden de aparición de los Objetos utilizados en la construcción.
4	Nombre	Muestra el nombre del Objeto, si se le cambió el color, mostrará el color utilizado.
5	Definición	Muestra la definición matemática del Objeto o la dependencia del Objeto.
6	Valor	Muestra el valor del Objeto que se visualiza en la Vista Algebraica.
7	Subtítulo (Rótulo en versiones más nuevas de GeoGebra)	Muestra el rótulo del Objeto, si este se encuentra definido.
8	Ayuda rápida	Al utilizarlo redirige directamente a la siguiente página http://wiki.geogebra.org/es/Protocolo_de_Construcción
9	Imprime	Envía a cola de impresión el protocolo de construcción, se abre la ventana emergente que se muestra en la figura 4.
10	Exportar como página web	Permite exportar el protocolo como una página web, se abre una ventana emergente como se muestra en la figura 5.
11	Regresar al inicio	Regresa al inicio de la construcción.
12	Retroceder una instrucción	Retrocede una instrucción en la construcción.
13	Avanzar una instrucción	Avanza una instrucción en la construcción.
14	Ir al final	Lleva al final de la construcción.

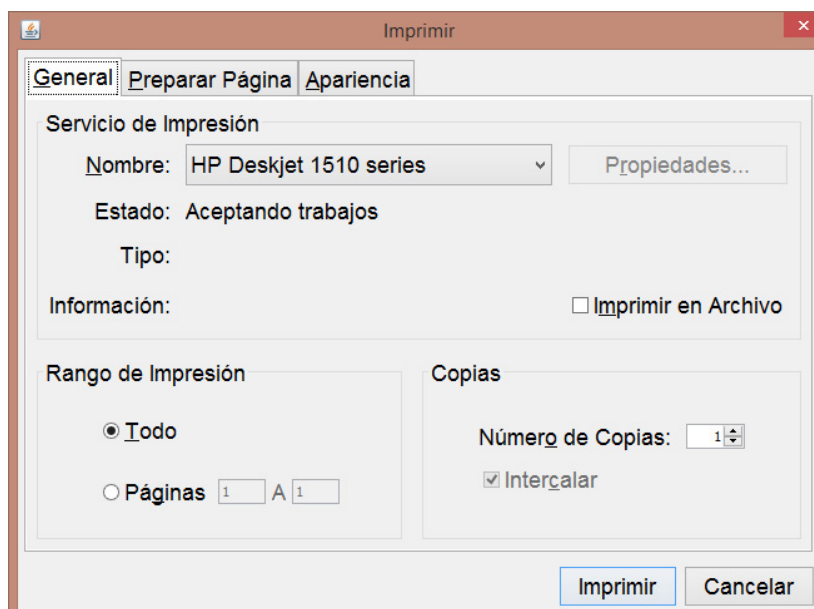


Figura 4. Ventana emergente de la herramienta Imprime.

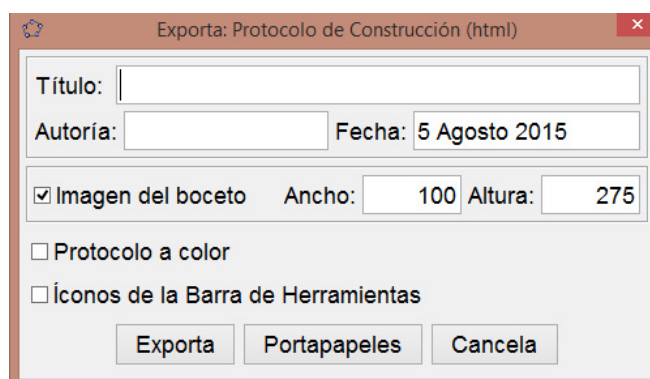


Figura 5. Ventana emergente de la herramienta Exportar como página web.

Práctica 8b

Instrucciones:

- 1) Ingresa a la siguiente página copiando y pegando el enlace en el navegador de tu preferencia <https://geogebra.org/material/show/id/1101041>, el applet que se presenta en esta página es la construcción de la función Coseno a través del movimiento de un punto sobre el perímetro de un círculo unitario, el movimiento depende de un ángulo ligado a un deslizador.
- 2) Da clic en el botón Descargar.

- 3) Activa la casilla de **Acepto los términos de licencia no-comercial de GeoGebra**.
- 4) Da clic en Descargar un archivo GeoGebra (.ggb).
- 5) Abre el archivo de GeoGebra descargado y activa la Vista de Protocolo de Construcción.
- 6) Abre un nuevo documento de GeoGebra, configura la cuadrícula, tamaño de letra y visualización a tu gusto.
- 7) Utilizando la Vista de Protocolo de Construcción y los conocimientos adquiridos en el desarrollo de las prácticas anteriores, reproduce la construcción mostrada en el applet.
- 8) Al terminarla, guarda la construcción como Practica8_2.

Práctica 8c

Instrucciones:

- 1) Ingresa a la siguiente página copiando y pegando el enlace en el navegador de tu preferencia <https://geogebra.org/material/show/id/1143881>, el applet que se presenta en esta página es la construcción de una esfera de radio variable que contiene una carga eléctrica variable en su interior, este applet permite ejemplificar el flujo y campo eléctricos generados por una carga puntual en el centro de la esfera (nota: este applet fue construido con GeoGebra 3D).
- 2) Da clic en el botón Descargar.
- 3) Activa la casilla de **Acepto los términos de licencia no-comercial de GeoGebra**.
- 4) Da clic en Descargar un archivo GeoGebra (.ggb).
- 5) Abre el archivo de GeoGebra descargado y activa la Vista de Protocolo de Construcción.
- 6) Abre un nuevo documento de GeoGebra, configura la cuadrícula, tamaño de letra y visualización a tu gusto.
- 7) Utilizando la Vista de Protocolo de Construcción y los conocimientos adquiridos en el desarrollo de las prácticas anteriores, reproduce la construcción mostrada en el applet.
- 8) Al terminarla, guarda la construcción como Practica8_3.

Sección de preguntas de la práctica 8

- Utilizando la construcción generada en la sección 2 de esta práctica, crea una nueva que te permita generar la función Seno, siguiendo el mismo formato, guarda el archivo como Practica8d.
- Expresa tu opinión acerca de las ventajas y desventajas del uso de la Vista de Protocolo de Construcción.

De forma general respecto a la práctica.

- ¿Cómo utilizarías estas herramientas en tu práctica docente?
- ¿Qué actividades extras deberían agregarse para adaptarlo al nivel educativo donde laboras?

Conclusiones

El objetivo de esta obra fue comprender el manejo de software de geometría dinámica (GeoGebra) para desarrollar habilidades y razonamiento tanto matemático como de alfabetización tecnológica para el docente de matemáticas. El cual fue abordado a través de 8 prácticas donde se estudiaron distintas herramientas que ofrece el software GeoGebra y diversos temas matemáticos que abordaron desde geometría, trigonometría, álgebra, cálculo (diferencial, integral y multivariable) y ecuaciones diferenciales, haciendo uso además de teorías y herramientas de la Matemática Educativa como sustento para lo realizado, tal como puede verse en la bibliografía citada a lo largo del libro.

Si bien el público objetivo de esta obra es el profesor, esto no excluye que cualquier interesado en el manejo de esta herramienta pueda utilizarlo para profundizar en su uso o perfeccionamiento, ya que el conocimiento debe estar al alcance de todos. La intención didáctica de la obra hace que esta pueda ser fácilmente retomada como una guía para estudiantes que quieran aprender el uso de estas herramientas (obviando las preguntas dirigidas al docente en las secciones correspondientes).

La investigación en Matemática Educativa acerca del uso de GeoGebra en el aula de matemáticas ha transformado la forma en la que los estudiantes interactúan con conceptos abstractos, proporcionando una plataforma interactiva que facilita la visualización y exploración de contenidos. Esta herramienta al integrar álgebra, geometría, cálculo y estadística en una sola interfaz, permite a los estudiantes manipular objetos matemáticos en tiempo real, lo cual facilita la comprensión y el aprendizaje activo. Esta facilidad de interacción y articulación de representaciones ayuda en la comprensión y desarrollo de conocimiento matemático en conjunto con otras habilidades como:

- La capacidad de observar la relación entre variables de manera dinámica,
- la resolución de problemas y el pensamiento crítico respecto a las soluciones que se plantean,
- la realización de conjeturas,
- la experimentación con diferentes escenarios, y
- la reflexión sobre el impacto de sus decisiones.

Además, la herramienta ofrece un espacio para el ensayo y error, lo cual favorece la autonomía en el proceso de aprendizaje, lo cual es especialmente importante en matemáticas

ya que permite a los estudiantes entender los procesos y estrategias involucradas en la resolución de problemas más allá de los simples resultados (Torres-Corrales et al., 2022).

Sin embargo, el uso de GeoGebra también plantea ciertos retos que pueden afectar el desarrollo del pensamiento matemático, una de las preocupaciones principales es la posibilidad de que los estudiantes se vuelvan dependientes de la herramienta, reduciendo su capacidad para resolver problemas sin tecnología o sin comprender completamente los conceptos subyacentes.

Según lo reportado por Dubarbie et al. (2024), es necesario contar con la infraestructura y los recursos tecnológico adecuados, además requerir de la capacitación docente para que puedan generar sus propias construcciones con GeoGebra hacia lo cual abonamos con esta obra, ya que según Berber et al. (2024), entre más docentes incursionen en el uso de estas herramientas mayor será el número de estudiantes que se beneficien de ello.

Es fundamental que los docentes guíen el uso de GeoGebra de manera que se mantenga el enfoque en los conceptos y procesos matemáticos, no solo en la obtención de respuestas rápidas, ya que la sobreexposición a la herramienta sin una reflexión profunda puede llevar a una comprensión superficial de los temas y una menor capacidad para abordar problemas matemáticos complejos de forma autónoma, lo que requiere que el docente sea crítico para la selección de herramientas en su labor educativa (Barreras et al., 2022).

En este sentido, los docentes deben equilibrar la tecnología con estrategias pedagógicas que fomenten el desarrollo del pensamiento crítico, como el análisis y la discusión de resultados, para evitar que los estudiantes se conviertan en meros consumidores de soluciones sin cuestionar sus propios razonamientos. Ahora bien, como mencionan Barreiro et al. (2024), el uso de la tecnología digital, el software, y particularmente GeoGebra no debe ser solamente una herramienta que lleve a obtener una solución, sino que deben incentivarse la reflexión acerca de las soluciones que nos presenta, cuáles son sus potencialidades y sus limitaciones. Lo anterior si es bien llevado, permite evitar que el uso de software se convierta solamente en una forma de agilizar lo que de otro modo se hacía tradicionalmente y abre la puerta a un abanico de posibilidades dentro del aula de matemáticas.

Referencias

- Acuña, M. (2016). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*. México: Gedisa.
- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Barreiro, P., Leonian, P. y Zuliani, C. (2024). 6. Análisis de una tarea matemática desde la resolución de problemas mediada por la tecnología. En M. Rodríguez, M. Pochulu y F. Espinoza (Coords.), *Educación matemática volumen 2: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 137-149). Ediciones UNGS.
- Barreras, A., Dubarbie, L. y Oller-Marcén, A. (2022). Análisis de applets de GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. *Bordón. Revista de Pedagogía*, 74(4), 65-83. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2022.93361>
- Berber, R., Martínez-Moreno, M., González-Briones, J., Velázquez-Sánchez, M. y Moreno-Ramírez, R. (2024). Uso de GeoGebra en el Aprendizaje de Matemáticas en la Ingeniería. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 8(3), 2012-2027. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i3.11391
- Boaler, J. (1993). Encouraging the transfer of 'school' mathematics to the 'real world' through the integration of process and content, context and culture. *Educational Studies in Mathematics*, 25(4), 341-373. <https://doi.org/10.1007/BF01273906>
- Bray, A. y Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, 114, 255-273. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004>
- Dubarbie, L., Barreras, A. y Oller-Marcén, A. (2024). El uso de GeoGebra en la enseñanza de conceptos matemáticos: prácticas, barreras y percepciones docentes. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 24(1), 77-100. <https://doi.org/10.17398/1695-288X.24.1.77>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65. <https://ma->

thinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>

Ertmer, P. A., y Ottenbreit-Leftwich, A. T. (2010). Teacher technology change: How knowledge, confidence, beliefs, and culture intersect. *Journal of Research on Technology in Education*, 42(3), 255-284. <https://doi.org/10.1080/15391523.2010.10782551>

Esparza, D. (2018). Uso autónomo de recursos de Internet entre estudiantes de ingeniería como fuente de ayuda matemática. *Educación Matemática*, 30(1), 73-91. <https://doi.org/10.24844/EM3001.03>

Foster, C. (2013). Mathematical études: Embedding opportunities for developing procedural fluency within rich mathematical contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 765-774. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.770089>

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3>

Geddes, K., Czapor, S. y Labahn, G. (1992). *Algorithms for Computer Algebra*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/b102438>

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>

Hoyles, C., y Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Springer Science y Business Media. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0286-1>

Klincsik, M. (2003). Teaching spline approximation techniques using MAPLE. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 35(2), 30-35. <https://doi.org/10.1007/BF02652769>

- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275-304). Sense Publishers. Web: <https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/PPP141/Laborde%20et%20al.%2006.pdf>
- Leadbetter, P. y Thomas, P. (1989). A review of computer algebra and its educational implications in the teaching of mathematics. *Education and Computing*, 5(4), 243-259. [https://doi.org/10.1016/S0167-9287\(89\)80050-0](https://doi.org/10.1016/S0167-9287(89)80050-0)
- Li, Q., y Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22(3), 215-243. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8>
- López, R., Molina, M. y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de Ingeniería. Un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA*, 11(2), 75-96. <https://doi.org/10.30827/pna.v11i2.6075>
- Moore, D. y McCabe, G. (2002). *Introduction to the Practice of Statistics*, 4th ed. New York: W. H. Freeman.
- More, M. (2017). Mathematics and engineering in real life through mathematical competitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 305-321. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1387297>
- Moses, J. (2012). Macsyma: A personal history. *Journal of Symbolic Computation*, 47(2), 123-130. <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2010.08.018>
- Niss, M. y Højgaard (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kor, L.K., Kosheleva, O., Strässer, R. (2010). *Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies*. En C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 133-177). Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_8
- Psycharis, S. (2013). Examining the effect of the computational models on learning performance, scientific reasoning, epistemic beliefs and argumentation: An implication for

the STEM agenda. *Computers & Education*, 68, 253-265. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.05.015>

Ruthven, K., Hennessey, S., y Deane, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, 51(1), 297-317. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2007.05.013>

Sammet, J. E. (1966). *Programming Languages: History and Fundamentals*. Prentice-Hall.

Sánchez, M. y Esparza, D. (2020). Mathematical help-seeking: observing how undergraduate students use the Internet to cope with a mathematical task. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 35(2), 30-35. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01120-1>

Torres-Corrales, D. e Hinojos, J. (2023). La formación matemática de ingenieros desde la Matemática Educativa. Estado del arte. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 25, e21, 1-16. <https://doi.org/10.24320/redie.2023.25.e21.4804>

Torres-Corrales, D., Hinojos, J. y Cuevas, O. (2022). El proceso de retroalimentación de tareas de matemáticas en la evaluación formativa de pregrado. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela*, 8(16), 123-137. <https://doi.org/10.55560/ARETE.2022.16.8.6>

van der Wal, N., Bakker, A., y Drijvers, P. (2017). Which Techno-mathematical Literacies Are Essential for Future Engineers?, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(1), 87-104. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9810-x>

Anexo A. Reporte de práctica de GeoGebra

Nombre del estudiante	
Número de práctica	

- 1) Lee toda la práctica de GeoGebra y contesta las siguientes preguntas antes de comenzar la construcción:

¿Qué espero aprender en esta práctica?	
¿Qué conozco de lo planteado?	
¿Qué desconozco de lo planteado?	

- 2) Listado de las herramientas utilizadas para el desarrollo de la práctica (de ser necesario, agregar más filas):

Herramienta (nombre)	Icono	Descripción de su funcionamiento	¿Es un objeto dependiente o libre?

3) Captura(s) de pantalla de la(s) construcción(es):

4) Preguntas de cierre del reporte:

¿Qué aprendí?	
¿Qué actividad no pude realizar?	
¿Qué modificaciones haría a la práctica si la utilizara clases?	

5) Sección para preguntas de la práctica.

6) Sección para comentarios adicionales.

Semblanza del autor:

Jesús Eduardo Hinojos Ramos



Es doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), México. Maestro en Matemática Educativa e Ingeniero en Electrónica por el Instituto Tecnológico de Sonora. Es profesor auxiliar del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) donde imparte asignaturas para estudiantes de pregrado y posgrado; es profesor de la Maestría en Didáctica de las Ciencias (modalidad virtual) de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ).

Es miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) y del Grupo Latinoamericano de Investigación Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa (FIME). Tiene la distinción del Sistema Nacional de Investigadores e Investigadoras (SNII) nivel 1 del SECIHTI. Ha realizado diversas publicaciones en eventos académicos y revistas indizadas nacionales e internacionales de la disciplina. Entre sus publicaciones más recientes se encuentran ¿Fenómeno estable o de estado estacionario? Obstáculos didácticos en la formación de ingenieros; An alternative to broaden the school-promoted meanings of mathematics in electrical sciences from socioepistemology; The construction of the integral for the arc length of a curve based on van Heuraet and Fermat's works.

Su principal línea de investigación es la Construcción Social del Conocimiento Matemático en las temáticas de formación de ingenieros y estudios históricos-epistemológicos del conocimiento matemático.

Sus perfiles en redes de investigadores son:

OrcID - <https://orcid.org/0000-0003-3276-0322>;

ResearchGate - https://www.researchgate.net/profile/Jesus-Hinojos-Ramos?ev=hdr_xprf;

Google Scholar - <https://scholar.google.com/citations?user=PMmISHQAAAAJ&hl=es>.

GeoGebra: una herramienta para el desarrollo profesional docente en
Matemáticas

Se terminó de editar en Ciudad Obregón, Sonora; en septiembre de 2025,
por la Oficina de Publicaciones del Instituto Tecnológico de Sonora.

Fue puesto en línea para su disposición en el sitio <https://www.itson.mx/publicaciones>

GeoGebra: una herramienta para el desarrollo profesional docente en Matemáticas

La presente obra es un trabajo que representa un esfuerzo realizado a lo largo de la formación profesional de su autor y se cristaliza como un manual centrado en los usos y bondades del software **GeoGebra** en su versión 5.0 (para escritorio), el contenido que se presenta en los 8 capítulos de este libro fue elaborado con la finalidad de utilizarse como una introducción para profesores y estudiantes que tienen interés en las diversas características y funcionalidades que ofrece el programa en temas referentes a Geometría, Álgebra, Cálculo, Métodos numéricos, Estadística, entre otros.

GeoGebra

